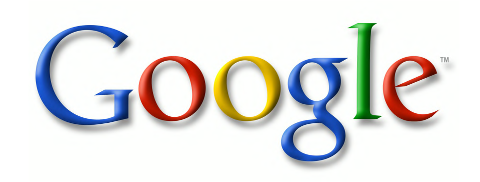

Google


RESEARCH LIBRARIES
33 06909653 9



COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BÉZOUT.

NOUVELLE Édition revue avec le plus grand soin, suivie d'un Commentaire par F. PEYRARD, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Bonaparte, et renfermant toutes les connoissances nécessaires pour l'admission à l'École Polytechnique.

SECONDE PARTIE,

CONTENANT LES ÉLÉMENS DE LA GÉOMÉTRIE, LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.



A PARIS,

CHEZ
PATRIS et Cie, lib., rue de la Colombe, en la Cité, n° 4;
BECHET, libraire, quai des Augustins, n° 63.
ARTHUS-BERTRAND, libraire, rue Hautefeuille;
VANRAEST et LAPEYRE, lib., quai Desaix, n° 1;

1810.

PRÉFACE DE F. PEYRARD.

LES Cours à l'usage de la Marine et de l'Artillerie de BÉZOUT ne diffèrent que par les applications. Dans les éditions précédentes du Cours de la Marine, j'avais placé les applications à l'Artillerie à la fin de chaque volume.

Dans cette *nouvelle* Édition, ces applications sont *intercalées* dans le texte même, ce qui est beaucoup plus commode. Par cet arrangement, les deux Cours de Bézout sont réunis en un seul.

Ce que j'ai ajouté à la fin de la géométrie de Bézout est un ouvrage suivi; la seconde partie, qui traite des surfaces, et la troisième, qui traite des solides, sont complètes, et peuvent tenir lieu de la seconde et troisième parties de la géométrie de Bézout, les plans exceptés. Je me suis conformé entièrement aux méthodes d'Euclide et d'Archimède; cependant, pour rendre la géométrie plus accessible, sans toutefois ne lui rien laisser perdre de sa rigueur, j'ai démontré autrement qu'eux, et autrement qu'on ne le fait aujourd'hui, plusieurs propositions fondamentales.

J'ai dit que je m'étais conformé entièrement à la méthode des anciens; mais, comme beaucoup de personnes connaissent peu cette méthode, je vais exposer le plus brièvement possible ce en quoi elle consiste.

Les géomètres anciens, je veux dire Euclide, Archimède et Apollonius, ne se sont jamais permis de substituer des nombres aux lignes, aux surfaces et aux solides; ils ne disent point par exemple : Le cercle est égal au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon; la sphère est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon.

Pour démontrer que les figures semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; que les solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues, ils n'ont jamais fait usage de proportions multipliées par ordre.

Les anciens avaient deux théories des proportions, l'une pour les nombres commensurables, et elle fait la matière des septième, huitième et neuvième livres d'Euclide; et l'autre pour les quantités continues, commensurables ou incommensurables, et elle fait la matière du cinquième livre. Dans le septième livre, Euclide démontre que, si quatre nombres sont en proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent; et dans le cinquième livre, il démontre que, si quatre grandeurs continues, commensurables ou incommensurables, forment une proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent. Il démontre dans le septième livre que, si quatre nombres sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; et que, si quatre nombres sont tels que le produit des extrêmes soit

égal au produit des moyens, les quatre nombres forment une proportion ; et il démontre dans le sixième livre que, si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle sous les extrêmes est égal au rectangle sous les moyens, et que si deux rectangles sont égaux, la base de l'un et sa hauteur forment les extrêmes d'une proportion, et la base de l'autre et sa hauteur en forment les moyens.

Les géomètres modernes, les anglais et allemands exceptés, du moins en partie, ne font point usage dans la géométrie de la théorie des proportions qu'Euclide a exposée pour les grandeurs continues; ils se contentent d'employer les proportions numériques; mais comme les propriétés des proportions numériques ne peuvent se démontrer rigoureusement que quand les nombres qui les composent sont commensurables, il est évident que les géomètres modernes pèchent contre la rigueur géométrique.

Notre analyse géométrique est purement numérique, celle des anciens géomètres était fondée sur le cinquième livre d'Euclide, et sur des théorêmes de géométrie rigoureusement démontrés.

Je sais que les modernes trouvent l'analyse des anciens difficile à suivre dans les questions un peu compliquées; mais cette difficulté n'est occasionnée que par la mauvaise disposition du texte, par le défaut de signes abréviatifs, et par la suppression des renvois. Mon ouvrage est terminé par deux propositions d'Archimède, démontrées analytiquement. La démonstration qu'il donne de la dernière, a de quoi



COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

---

pour mettre le lecteur en état de juger laquelle des deux mérite la préférence, je démontrerai ensuite, suivant l'une et l'autre méthode, quelques théorèmes de la géométrie élémentaire.

Soit A une grandeur constante, et B une grandeur variable, de manière que B étant plus petit que A, la grandeur B ne puisse jamais surpasser A, et de manière que B étant plus grand que A, la grandeur B ne puisse jamais devenir plus petite que A. Si la différence des deux grandeurs A, B est plus petite que toute grandeur donnée, on dit alors que A est la limite de B; limite majeure, si A est plus grand que B; limite mineure, si A est plus petit que B.

Soient les deux constantes A, B, et les deux variables a, b; si les constantes A, B sont toutes les deux ou limites majeures ou limites mineures, on dit que A, B sont des limites semblables des variables a, b.

On démontre que, si les variables dans tous leurs changements sont en même raison, les limites semblables sont en même raison que les variables : voici cette démonstration.

Que A, B soient des limites semblables des variables a, b, et que a, b soient en même raison dans tous leurs changements; je dis que $A : B :: a : b$.

Que A, B soient limites majeures.

Si l'on n'a pas $a : b :: A : B$, l'on aura $a : b :: A : B - x$; ou bien $a : b :: A - x' : B$.

Supposons que $a : b :: A : B - x$. Faisons ensorte que $b + q > B - x$ et $< B$ (*), et que $a + p : b + q :: a : b$; on aura $a + p : b + q :: A : B - x$. Mais $b + q > B - x$; donc $a + p > A$, ce qui est impossible, parce que A est limite majeure, donc l'on ne peut pas avoir $a : b :: A : B - x$;

Supposons ensuite que $a : b :: A - x' : B$. Faisons ensorte que $a + p' > A - x'$ et $< A$, et que $a + p' : b + q' :: a : b$, on aura $a + p' : b + q' :: A - x' : B$. Mais $a + p' > A - x'$; donc $b + q' > B$, ce qui est impossible, parce que B est limite majeure.

Que A, B soient limites mineures.

Si l'on n'a pas $a : b :: A : B$, l'on aura $a : b :: A : B + x$, ou bien $a : b :: A + x' : B$;

Que $a : b :: A : B + x$. Faisons ensorte que $b + q < B + x$ et $> B$, et que $a + p : b + q :: a : b$; on aura $a + p : b + q :: A : B + x$; mais $a + q < B + x$; donc $a + p < A$, ce qui est impossible, parce que A est limite mineure; donc l'on ne peut pas avoir $a : b :: A : B + x$;

Que $a : b :: A + x' : B$. Faisons ensorte que

(*) Cela peut toujours se faire par le moyen de la première proposition du liv. 10 des Éléments d'Euclide, qui est ainsi conçue : Deux grandeurs inégales étant données, si de la plus grande on retranche une partie plus grande que sa moitié ou égale à sa moitié, si du reste on retranche une partie plus grande que sa moitié ou égale à sa moitié, et ainsi de suite, on trouvera un reste moindre que la plus petite des grandeurs proposées.

blables, inscrits dans les cercles C, c, sont en même raison dans tous leurs changements; donc leurs limites C, c sont en même raison que les périmètres P, p de ces polygones; mais les périmètres P, p sont entre eux comme les diamètres D, d des cercles C, c; donc $C : c :: D : d$.

Démontrons, suivant la méthode d'exhaustion, que les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles C, c, ayant pour diamètres les droites D, d; je dis que $D^2 : d^2 :: C : c$. Que cela ne soit point, on aura $D^2 : d^2 :: C : c - x$, ou bien $D^2 : d^2 :: C : c + x'$.

Que $D^2 : d^2 :: C : c - x$. Dans le cercle c inscrivons un polygone p, de manière que $c - p > c - x$, et dans le cercle C inscrivons un polygone P semblable au polygone p, on aura $D^2 : d^2 :: P : p$; mais $D^2 : d^2 :: C : c - x$; donc $P : p :: C : c - x$; mais $p > c - x$; donc $P > C$, ce qui est impossible; donc l'on n'a point $D^2 : d^2 :: C : c - x$. On démontrera de la même manière que l'on n'aura point $d^2 : D^2 :: c : C - x$.

A présent que $D^2 : d^2 :: C : c + x'$; on aura $d^2 : D^2 :: c + x' : C$; mais $c + x' : C :: c : C - y$; donc $d^2 C - y : D^2 :: c : C - y$, ce qui est démontré impossible; donc l'on n'a point $D^2 : d^2 :: C : c + x'$; mais on a démontré que l'on n'avait pas $D^2 : d^2 :: C : c - x$; donc $D^2 : d^2 :: C : c$.

Démontrer la même proposition suivant la méthode des limites.

Puisque dans les cercles C, c, on peut inscrire deux polygones semblables P, p, de manière que les grandeurs $C - P$, $c - p$ soient chacune plus petites que toute grandeur donnée, ces cercles seront les limites des polygones P, p; mais deux polygones semblables et inscrits dans des cercles, sont en même raison dans tous leurs changements; donc les cercles C, c sont en même raison que les polygones P, p; mais les polygones P, p sont entre eux comme les quarrés des diamètres de ces cercles; donc $C : c :: D^2 : d^2$.

Démontrons, suivant la méthode d'exhaustion, qu'un cercle A est égal à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence du cercle A, et pour hauteur une droite égale au rayon de ce cercle.

Si le triangle B n'est pas égal au cercle A, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit plus petit; inscrivons dans le cercle A un polygone P plus grand que le triangle; le polygone P sera égal à un triangle ayant pour base une droite plus petite que la circonférence du cercle A, et pour hauteur une droite plus petite que son rayon; donc P est plus petit que B. Mais, au contraire, P est plus grand que B, ce qui est impossible; donc B n'est pas plus petit que A.

Que B soit plus grand que A. Circonscrivons au cercle A un polygone plus petit que le triangle B, ce polygone sera égal à un triangle ayant pour base une droite plus grande que la circonférence du cercle A, et pour hauteur une droite égale à son rayon. Donc P' est plus grand que B; mais, au contraire, P' est plus

petit que B, ce qui est impossible; donc B n'est pas plus grand que A. Donc B est égal à A.

Démontrons la même proposition suivant la méthode des limites.

Inscrivons et circonscrivons au cercle A deux polygones réguliers et semblables P, P', de manière que $P'-P$ soit plus petit que toute grandeur donnée; il est évident, à plus forte raison, que les grandeurs $P'-A$, $A-P$ sont chacune plus petites que toute grandeur donnée; donc A est la limite des variables P, P'. Que les triangles semblables T, T' soient égaux aux polygones P, P' chacun à chacun; donc $T'-T$ est plus petit que toute grandeur donnée; mais $T < B$ et $T' > B$; donc B est la limite des variables T, T'. Mais $P' : T' :: P : T$; donc les variables dans tous leurs changements sont en même raison; donc les limites A, B sont en même raison que $P'T'$.; mais $P'=T'$; donc $A=B$. Donc, etc.

Les démonstrations, suivant ces deux méthodes, ont une partie commune qui en est la partie essentielle, et qui est fondée sur la première proposition du livre 10 des Éléments d'Euclide.

C'est par le moyen de cette proposition que l'on démontre que, si d'une droite ou d'un arc de cercle, on retranche la moitié; que si du reste on retranche la moitié, et ainsi de suite, on trouvera un reste qui est partie aliquote de cette droite ou de cet arc, et qui est plus petit que toute droite donnée ou tout arc donné. (Voyez les art. 35, 36, 70); c'est par ce moyen

que l'on démontre que, si d'un cercle on retranche le quarré inscrit, si du reste on retranche l'excès de l'octogone inscrit sur le quarré inscrit, etc., on trouve enfin un reste plus petit que toute surface donnée, et ce reste est le cercle moins le dernier polygone inscrit. C'est par ce moyen que l'on démontre que, si du quarré circonscrit l'on retranche l'octogone circonscrit, et ainsi de suite, l'on trouve un reste plus petit que toute surface donnée, et ce reste est le dernier polygone circonscrit moins le cercle (voy. 85, 86, 87); c'est enfin par ce moyen que l'on démontre que, si d'une pyramide on retranche deux prismes, que si de chacune des pyramides restantes on retranche deux prismes, etc., on trouve enfin des pyramides dont la somme est plus petite que tout solide donné (Voyez les art. 109, 110), etc., etc.

Voilà la partie qui est commune aux deux méthodes. Cette partie étant bien établie, le reste n'est, pour ainsi dire, qu'une formule banale. Mais la formule de la méthode d'exhaustion est claire, et porte la conviction dans l'esprit, et la formule de la méthode des limites ne me paraît pas avoir cet avantage.

La méthode des anciens me paraît donc préférable; si Pythagore et Platon exigeaient que leurs élèves cultivassent les mathématiques, c'est parce qu'ils savaient que la géométrie était plus propre, que toute autre science, à accoutumer l'homme à raisonner juste. La géométrie ancienne est, sous ce rapport, beaucoup préférable à la géométrie moderne. Voilà le motif qui me fait préférer les méthodes rigoureuses

d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius, aux méthodes relâchées des géomètres qui ont paru dans la suite.

Newton ne prisait ses sublimes découvertes que quand elles étaient démontrées avec toute la rigueur géométrique, et cet exemple utile a été suivi par MM. Lagrange et Laplace.

Nota. Les renvois à la géométrie de Bézout sont précédés de la lettre B, de cette manière (B. 57); pour indiquer, qu'on doit lire les articles 57, 58, 59, 60 de la géométrie de Bézout, j'écris (L. 57—60).

A l'exemple des anciens, je distingue les surfaces et les solides, en surfaces égales, en solides égaux; en surfaces égales et semblables, en solides égaux et semblables; en surfaces semblables et solides semblables.

Je ne dis point la surface ou l'aire d'un triangle est égale, etc.; la solidité ou le volume de la sphère est égal, etc.; car c'est comme si l'on disait: la surface ou l'aire d'une surface ou d'une aire terminée par trois droites est égale, etc.; la solidité ou le volume d'un solide ou d'un volume terminé par une surface dont tous les points sont également éloignés d'un point nommé centre est égal, etc., et en cela je parle encore comme les anciens géomètres.

ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE.

1. L'ESPACE que les corps occupent, a toujours les trois dimensions, *longueur, largeur,* et *profondeur* ou *épaisseur.*

Quoique ces trois dimensions se trouvent toujours ensemble dans tout ce qui est corps, néanmoins nous les séparons assez souvent par la pensée : c'est ainsi que, lorsque nous pensons à la profondeur d'une riviere, d'une rade, etc., nous ne sommes point occupés de sa longueur ni de sa largeur ; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de vent qu'une voile peut recevoir, nous ne nous occupons que de sa longueur et de sa largeur, et point du tout de son épaisseur.

Pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de saucissons qui entrent dans la chemise d'une batterie, nous ne nous occupons que de sa longueur et de sa largeur, et point du tout de son épaisseur.

Nous distinguerons donc trois sortes d'étendue ; savoir :

L'étendue en longueur seulement, que nous appellerons *ligne ;*

L'étendue en longueur et largeur seulement, que nous nommerons *surface* ou *superficie ;*

Enfin l'étendue en longueur, largeur et profondeur, que nous nommerons indifféremment, *volume*, *solide*, *corps.*

Nous examinerons successivement les propriétés de ces trois sortes d'étendue ; c'est là l'objet de la science qu'on appelle *Géométrie.*

SECTION PREMIERE.

Des Lignes.

2. Les extrémités d'une ligne se nomment des *points*. On appelle aussi de ce nom les endroits où une ligne est coupée; ou encore, ceux où des lignes se rencontrent.

On peut considérer le point comme une portion d'étendue qui auroit infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur.

La trace d'un point qui seroit mu de maniere à tendre toujours vers un seul et même point, est ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre : AB (fig. 1) est une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe*, la trace d'un point qui, dans son mouvement, se détourne infiniment peu, à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une seule espece de ligne droite, mais qu'il y a une infinité de courbes différentes.

Les lignes droites ou courbes, que nous pouvons tracer sur le papier ou sur toute autre surface, ne peuvent être sans quelque largeur, parceque le crayon, la plume, ou en général l'instrument dont nous nous servons n'est jamais terminé par une pointe que l'on puisse regarder comme n'ayant ni longueur ni largeur. Aussi ces lignes ne doivent-elles être regardées que comme la représentation des lignes proprement dites.

3. Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorsqu'il s'agit de conduire par les deux points A et B (fig. 1) une ligne droite sur le papier, on sait qu'on emploie une regle qu'on applique sur les deux points A et B, ou très près, et à distances égales de ces deux points, et qu'avec un crayon ou une plume qu'on fait glisser le long de cette regle, on trace la ligne AB.

Mais lorsqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point A l'extrémité d'une ficelle, que l'on frotte avec un morceau de craie; et appliquant un autre de ses points sur le point B, on pince la ficelle pour l'élever au-dessus de A B, et la laissant aller, elle marque, en s'appliquant sur la surface, une trace qui est la ligne droite dont il s'agit.

Quand il est question d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre, on se contente de marquer entre ces deux extrémités un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorsqu'on veut prendre des *alignements* sur le terrain, on place à l'une des *extrémités* B (fig. 2) un bâton ou jallon BD, que, par *le moyen* d'un fil à-plomb, on rend le plus vertical que faire se peut; on en fixe un autre de la même maniere au point A, et, se plaçant à ce même point A, on fait placer successivement plusieurs autres jallons, à différents points C, C, etc., entre A et B, de maniere qu'appliquant l'œil le plus près qu'il est possible du jallon AD, et regardant le jallon BD, celui CD, dont il s'agit, paroisse confondu avec BD; alors tous les points C, C, C, etc., déterminés de cette maniere, sont dans la ligne droite AB.

On s'y prendroit d'une maniere semblable, s'il s'agissoit de prolonger la ligne droite AB.

Quand les deux extrémités A et B ne sont pas visibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enseignerons par la suite.

4. Les lignes se mesurent par d'autres lignes; mais, en général, la mesure commune des lignes, c'est la ligne droite. Mesurer une ligne droite ou courbe, ou une distance quelconque, c'est chercher combien de fois cette ligne ou cette distance contient une ligne droite connue et déterminée, que l'on considére alors comme unité. Cette unité est absolument arbitraire: aussi y a-t-il bien des especes de mesures différentes en fait de lignes. Indépendamment de la toise et

de ses parties, dont nous avons fait connoître les subdivisions en arithmétique, on distingue encore le pas ordinaire, le pas géométrique, la brasse, etc., pour les petites étendues; la lieue, le mille, le werste, etc., pour les grandes étendues.

Le pas ordinaire est de 2 pieds et demi.

Le pas géométrique, qu'on appelle autrement pas double, est de 5 pieds.

La brasse est de 5 pieds; on compte par brasses, dans la marine, les longueurs des cordages et les profondeurs qu'on mesure à la sonde.

La lieue est composée d'un certain nombre de toises ou de pas géométriques. La lieue marine est de 2853 toises. Le mille, le werste, etc., sont pareillement des mesures itinéraires, dont la valeur, ainsi que celle de la lieue, n'est pas la même dans tous les pays, tant parceque chacune de ces espèces de mesures n'a pas par-tout le même nombre d'unités, c'est-à-dire, le même nombre de pas, ou de toises, ou de pieds, etc., que parceque le pied, qui sert d'unité à ces toises ou à ces pas, n'est pas de même grandeur par-tout.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire sur les lignes, nous supposerons que les figures dans lesquelles nous les considérerons sont tracées sur une surface *plane*. On appelle ainsi une surface à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les sens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne considérerons, dans ces Eléments, que *la circonférence du cercle*. On appelle ainsi une ligne courbe BCFDG (fig. 3), dont tous les points sont également éloignés d'un même point A pris dans le plan sur lequel elle est tracée. Le point A se nomme le *centre*; les lignes droites AB, AC, AF, etc., qui vont de ce point à la circonférence, se nomment *rayons*; et tous ces rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent la distance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme BD, qui, passant par le centre, se terminent de part et d'autre à la circonférence, sont appelées *diametres*; comme chaque diametre est composé d

deux rayons, tous les diametres sont donc égaux. Il est d'ailleurs évident que tout diametre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales; car, si l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli soit dans le diametre BD, tous les points de BGD doivent s'appliquer sur BCED, sans quoi il y auroit des points de la circonférence qui seroient inégalement éloignés du centre.

Les portions BC, CE, ED, etc., de la circonférence, se nomment *arcs;* et ce qu'on appelle *cercle*, c'est la surface même renfermée par la circonférence BCFDGB.

Une droite, comme DF, qui va de l'extrémité D d'un arc à l'autre extrémité F, s'appelle *corde* ou *soutendante* de cet arc.

7. Il est aisé de voir que *les cordes égales d'un même cercle ou de cercles égaux soutendent des arcs égaux, et réciproquement.* Car, si la corde DG est égale à la corde DF, en imaginant qu'on transporte la corde DG et son arc, pour appliquer DG sur DF, il est visible que le point D étant commun, et le point G tombant alors sur le point F, tous les points de l'arc DG doivent tomber sur l'arc DF, puisque, si quelqu'un de ces points ne tomboit pas sur l'arc DF, l'arc DG n'auroit pas tous ses points également éloignés du centre A.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales, auxquelles on a donné le nom de *degrés :* on partage le degré en 60 parties égales, qu'on appelle *minutes;* chaque minute en 60 parties égales, qu'on appelle *secondes;* et de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties, consécutivement, les noms *minutes, secondes, tierces, quartes, quintes*, etc.

La marque du degré est celle-ci. . . . . ^{o}
Celle de la minute. . . . . $'$
De la seconde. $''$
De la tierce. . . . . $'''$
De la quarte. IV

Ainsi, pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit 3° 24′ 55″.

Cette division de la circonférence est admise généralement; mais des vues de commodité dans la pratique ont introduit, dans quelques parties des mathématiques pratiques, quelques usages particuliers dans la maniere de compter les degrés et parties de degré. Les astronomes, par exemple, comptent les degrés par trentaines, qu'ils appellent *signes*, c'est-à-dire, qu'ayant à compter 66° 42′, par exemple; comme ce nombre renferme 2 fois 30° et 6° 42′ de plus, ils compteroient 2 signes et 6° 42′, et ils écriroient 2^s 6° 42′.

Les marins, pour les usages de la boussole, partagent la circonférence en 32 parties égales, dont chacune se nomme *air* ou *rhumb* de vent : chacune de ces parties est donc la 32ᵉ partie de 360°, c'est-à-dire, qu'elle est de 11° 15′; ainsi, au lieu de 45°, on dit 4 airs de vent, parceque 45° font 4 fois 11° 15′; pareillement, au lieu de 18° 27′, on diroit 1 air de vent et 7° 12′.

Des Angles, et de leur Mesure.

9. Deux lignes AB, AC, qui se rencontrent, peuvent former entre elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les figures 4, 5, 6.

Cette ouverture BAC est ce qu'on appelle un *angle;* et cet angle est dit angle *rectiligne*, ou *curviligne*, ou *mixtiligne*, selon que les lignes qui le comprennent sont, ou toutes deux lignes droites, ou toutes deux lignes courbes; ou l'une, une ligne droite, et l'autre, une ligne courbe.

Nous ne parlons, pour le présent, que des angles rectilignes.

10. Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite AB étoit d'abord couchée sur AC, et qu'on l'a fait tourner sur le point A (comme une branche de compas sur sa charniere), pour l'amener dans

la position AB qu'elle a actuellement. La quantité dont AB a tourné est précisément ce qu'on appelle un *angle*.

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés; en sorte que l'angle formé par les lignes AC, AB (fig. 4), est absolument le même que celui que forment les lignes AF et AE, qui sont une extension de celles-là. En effet, la ligne AB et la ligne AE ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur position actuelle.

Le point A, où se rencontrent les deux lignes AB, AC, s'appelle le *sommet de l'angle;* et les deux lignes AB, AC, en sont les côtés.

Pour *désigner* un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le sommet, et les deux autres sont placées le long des côtés; et en énonçant ces lettres, nous placerons toujours celle du sommet au milieu : ainsi, pour désigner l'angle compris par les deux lignes AB, AC, nous dirons l'angle BAC ou CAB.

Cette attention est principalement nécessaire, lorsque plusieurs angles ont leur sommet au même point; car, si dans la figure 4, par exemple, on disoit simplement l'angle A, on ne sauroit si l'on veut parler de l'angle BAC ou de l'angle BAD; mais lorsqu'il n'y a qu'un seul angle, comme dans la figure 4*, on peut dire simplement l'angle *a*, c'est-à-dire, le désigner par la lettre de son sommet.

11. Puisque l'angle BAC (fig. 4), n'est autre chose que la quantité dont le côté AB auroit dû tourner sur le point A, pour venir de la position AC dans la position AB; et que, dans ce mouvement, chaque point de AB, le point B, par exemple, restant toujours également éloigné de A, décrit nécessairement un arc de cercle qui augmente ou diminue précisément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue, il est naturel de prendre cet arc pour mesure de l'angle; mais comme chaque point de AB décrit un arc de longueur différente, ce n'est point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ses degrés et

parties de degré, qui sera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de AB, puisque tous ces points commençant, continuant et finissant leur mouvement dans le même temps, font nécessairement le même nombre de pas; toute la différence qu'il y a, c'est que les points les plus éloignés du point A font des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que.........

12. *Un angle quelconque* BAC (fig. 4) *a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

Ainsi, quand par la suite nous dirons : Un tel angle a pour mesure un tel arc, on doit entendre qu'il a pour mesure le nombre des degrés ou parties de degré de cet arc.

13. Donc, *pour diviser un angle en plusieurs parties égales*, il ne s'agit que de diviser l'arc qui lui sert de mesure en autant de parties égales, et de tirer, par les points de division, des lignes au sommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la division des arcs.

14. Et *pour faire un angle égal à un autre*, par exemple, pour faire au point *a* de la ligne *ac* (fig. 4) un angle égal à l'angle BAC (fig. 4), il faut, d'une ouverture de compas arbitraire, et du point *a* comme centre, décrire un arc indéfini *cb*; posant ensuite la pointe du compas sur le sommet A de l'angle donné BAC, on décrira, de la même ouverture, l'arc BC compris entre les deux côtés de cet angle; et ayant pris avec le compas la distance de C à B, on la portera de *c* en *b*; ce qui donnera le point *b*, par lequel, et par le point *a* tirant la ligne *ab*, on aura l'angle *bac* égal à BAC.

En effet, l'angle *bac* a pour mesure *bc* (12), et l'angle BAC a pour mesure BC. Or, ces deux arcs sont égaux, puisqu'appartenant à des arcs égaux ils ont d'ailleurs des cordes égales (7); car la distance de *b* à *c* a été faite la même que celle de B à C.

15. L'angle BAC (fig. 5) se nomme angle *droit*, lorsque l'un AB de ses côtés ne penche ni vers l'autre côté AC, ni vers son prolongement AD.

On l'appelle angle *aigu* (fig. 4), lorsque l'un AB de ses côtés penche plus vers l'autre côté AC, que vers son prolongement AD.

Enfin on l'appelle *obtus* (fig. 6), lorsqu'un côté AB penche plus vers le prolongement de l'autre côté AC, que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (12) sur la mesure des angles, 1° *qu'un angle droit a pour mesure* 90°; *un angle aigu, moins que* 90°; *et un angle obtus, plus que* 90°.

Car, si la ligne AE (fig. 3) ne penche ni vers AB, ni vers son prolongement AD, les deux angles BAE, DAE seront égaux; donc les arcs BE et DE, qui leur servent de mesure, seront aussi égaux : or, ces deux arcs, composant ensemble la demi-circonférence, valent ensemble 180°; donc chacun d'eux est de 90° : donc aussi les deux angles BAE, DAE sont chacun de 90°.

D'après cela, il est évident que BAC est de moins, et BAF de plus que 90°.

17. 2° *Les deux angles* BAC, BAD (fig. 4, 5 et 6) *que forme une ligne droite* AB *tombant sur une autre droite* CD, *valent toujours ensemble* 180°. Car on peut toujours regarder le point A (fig. 4) comme le centre d'un cercle dont CD est alors un diametre : or, les deux angles BAC, BAD ont pour mesure les deux arcs BC et BD qui composent la demi-circonférence; ils valent donc ensemble 180° ou autant que deux angles droits.

18. 3° *Que si d'un même point* A (fig. 3), *on tire tant de droites* AC, AE, AF, AD, AG, etc., *qu'on voudra, tous les angles* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, *qu'elles comprennent, ne feront jamais que* 360°. Car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles, tels que BAC et BAD (fig. 4), qui, pris ensemble, font 180°, sont dits *suppléments* l'un de l'autre : ainsi BAC est le supplément de BAD, et BAD est le supplément de BAC; parceque l'un de ces angles est ce qu'il faudroit ajouter à l'autre, pour faire 180°.

Les angles égaux auront donc des suppléments égaux; et ceux qui auront des suppléments égaux, seront égaux.

20. Concluons de là, *que les angles* BAC, EAD (fig. 7), *opposés au sommet, et formés par les deux droites* BD, EC, *sont égaux.*

Car BAC a pour supplément CAD, et EAD a aussi pour supplément CAD.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc est plus petit ou plus grand que 90°. Ainsi (fig. 3), l'angle BAC a pour complément CAE; l'angle BAF a pour complément FAE. Le complément est donc ce qu'il faut ajouter à un angle, ou ce qu'il faut en retrancher, pour qu'il vaille 90°.

Les angles aigus qui auront des compléments égaux seront donc égaux, et réciproquement. Il en sera de même des angles obtus.

On rencontre sans cesse les angles, tant dans la théorie que dans la pratique.

C'est par les angles qu'on détermine les positions des objets les uns à l'égard des autres; les angles flanqués, les angles d'épaule et de courtine, servent à déterminer la position des différentes lignes d'un front de fortification. Le tir du canon est réglé par l'angle que la ligne de mire fait avec le prolongement de l'axe de la piece.

Nous aurons assez d'occasions par la suite de nous convaincre qu'on les rencontre à chaque pas dans la théorie. Quant à la pratique, nous ferons remarquer que c'est par les angles qu'on juge de la route que suit un navire; qu'on distingue si un navire qu'on rencontre en mer a le vent sur nous, ou si nous l'avons sur lui; c'est par les angles qu'on détermine les positions des objets les uns à l'égard des autres; c'est en variant les angles que les voiles et le gouvernail font avec la quille, qu'on produit les différentes évolutions du navire, qu'on change sa route, et qu'on accélere ou qu'on retarde son mouvement. C'est encore par la mesure des angles qu'on parvient à déterminer en mer, en quel lieu on est.

Les instruments qui servent à mesurer les angles ou à former des angles tels qu'on le juge à propos, sont en assez grand nombre; nous allons faire connoître les principaux.

22. L'instrument représenté par la figure 8, et qu'on appelle *rapporteur,* sert à mesurer les angles sur le papier, et à former sur le papier les angles dont on peut avoir besoin. L'usage en est commode et fréquent. C'est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180°. Le centre de cet instrument est marqué par une petite échancrure C. Quand on veut mesurer un angle tel que BAC (fig. 4, 5, 6, etc.), on applique le centre C sur le sommet A de l'angle qu'on veut mesurer, et le rayon CB du même instrument, sur l'un AC des *côtés* de cet angle; alors le côté AB prolongé, *s'il est nécessaire*, fait connoître, par celle des divisions de l'instrument par laquelle il passe, de combien de degrés est l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle, et par conséquent (12) de combien de degrés est cet angle BAC.

Pour faire, avec le même instrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés, on applique le rayon CB de l'instrument sur la ligne qui doit servir de côté à l'angle qu'on veut former, et de maniere que le centre C soit sur le point où cet angle doit avoir son sommet; puis, cherchant sur les divisions de l'instrument le nombre de degrés en question, on marque sur le papier un point en cet endroit; par ce point et par le sommet, on tire une ligne droite, qui fait alors, avec la premiere, l'angle demandé.

23. Pour mesurer les angles sur le terrain, on emploie l'instrument représenté par la figure 9 : on le nomme *graphometre.* C'est un demi-cercle divisé en 180°, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diametre. Le diametre DB fait corps avec l'instrument; mais le diametre EC, qu'on nomme *alidade,* n'y est assujetti que par le centre A, autour duquel il peut tourner et parcourir, par son extrémité C, toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diametres est garni à ses deux extré-

mités de pinnules, à travers lesquelles on regarde les objets. L'instrument est porté par un pied, et peut, sans rien changer à la position du pied, être incliné dans tous les sens, selon qu'on en a besoin.

Quand on veut mesurer l'angle que forment deux lignes droites tirées d'un point A où l'on est, à deux autres objets F et G, on place le centre du graphometre en A, et on dispose l'instrument de maniere que, regardant à travers les pinnules du diametre fixe DAB, on apperçoive l'un F de ces deux objets, et qu'en même temps l'autre objet G se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphometre; alors on fait mouvoir l'alidade EC jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir l'objet G à travers les pinnules E et C; l'arc BC, compris entre les deux diametres, est alors la mesure de l'angle BAF.

On voit aussi, d'après ce que nous venons de dire, comment on peut former sur le terrain un angle d'un nombre déterminé de degrés. On fait le plus souvent, sur la largeur et à l'extrémité du diametre mobile, des divisions, qui, selon la maniere dont elles correspondent aux divisions mêmes de l'instrument, servent à connoître les parties de degré de 5 en 5 minutes, ou de 3 en 3.

Cet instrument est aussi, le plus souvent, garni d'une *boussole* ordinaire ou simple : on la voit dans la même figure 9.

L'aiguille aimantée, qui en fait la piece principale, est soutenue en son milieu sur un pivot, sur lequel elle a toute la mobilité possible. Comme sa propriété est de rester constamment dans une même position, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (au moins dans un même lieu, et pendant un assez long intervalle de temps), on l'emploie utilement sur ces sortes d'instruments, pour déterminer la position des objets à l'égard des points cardinaux, ou à l'égard de la ligne nord et sud, avec laquelle elle fait toujours le même angle dans un même lieu. Sur le bord de la cavité qui renferme l'aiguille, on marqué communément les 360° de la

circonférence. Quand on tourne l'instrument, l'aiguille, par la propriété qu'elle a de revenir dans une même situation, marque, par la nouvelle division à laquelle elle répond, de combien de degrés l'instrument a tourné.

On emploie aussi la boussole ordinaire sans le graphometre; mais c'est seulement pour déterminer grossièrement les points de détail d'un plan ou d'une carte, dont les points principaux ont été fixés avec exactitude, de la maniere que nous exposerons par la suite.

24. La *boussole marine*, ou le *compas de mer*, ou encore le *compas de variation* (fig. 10), ne differe guere de la boussole ordinaire que par une suspension qui lui est propre, et qui a pour objet de faire que les parties de cette machine, *qui servent* à la mesure des angles, ne participent à d'autres mouvements du vaisseau qu'à ceux qu'il peut avoir pour tourner horizontalement. Lorsqu'elle n'est employée qu'à connoître la direction de la quille du vaisseau, on l'appelle *compas de route*. Elle est renfermée dans une espece d'armoire qu'on appelle *habitacle*, et qui est située dans le sens de la largeur du vaisseau. L'aiguille n'est pas isolée sur son pivot, comme dans la boussole ordinaire; elle seroit trop sujette à vaciller; on la charge d'un morceau de talc taillé en rond, et collé entre deux morceaux de papier; et on trace dessus la rose des vents, c'est-à-dire, qu'on en partage la circonférence en rhumbs de vent. On conçoit donc que si le vaisseau vient à tourner d'une certaine quantité, comme l'aiguille reste toujours ou revient toujours à la même situation, elle ne répondra plus au même point de l'habitacle : en observant donc quel est le rhumb de vent qui répond à celui qu'occupoit d'abord l'aiguille, on connoîtra de combien le vaisseau a tourné. On pourra donc s'en servir pour ramener et retenir constamment le vaisseau dans une même direction.

Quand on emploie la boussole à *relever* les objets, c'est-à-dire, à reconnoître l'*air de vent* auquel ils répondent, on l'appelle *compas de variation :* ce nom lui vient d'un autre usage dont ce n'est pas ici le lieu de parler. Alors on la garnit

de deux pinnules A et B (fig. 10), par lesquelles on vise aux objets dont on veut connoître la situation. En mer, il faut deux observateurs; l'un qui tourne et ajuste le compas de variation de maniere à appercevoir l'objet; et, pendant ce temps, l'autre observe quelle est la position de l'aiguille à l'égard de la ligne DE, qui est un fil tendu à angles droits sur la ligne qu'on conçoit passer par A et B.

Des Perpendiculaires et des Obliques.

25. Nous avons dit (15) que la ligne AB (fig. 5), qui ne penche ni vers AC ni vers AD, formoit avec ces deux parties des angles qu'on appelle *droits*.

Cette même ligne AB est aussi ce qu'on appelle *une perpendiculaire* à la ligne AC, ou DC, ou AD.

D'après cette définition, on doit regarder comme vérités évidentes les trois propositions suivantes.

26. 1° *Quand une ligne* AB (fig. 11) *est perpendiculaire sur une autre ligne* CD, *celle-ci est aussi perpendiculaire sur la ligne* AB.

Car, lorsque AB est perpendiculaire sur CD, les angles AEC, AED sont égaux : or, AED est égal à BEC (20); donc AEC est égal à BEC; donc la ligne CE ou CD ne penche ni vers AE ni vers BE; donc elle est perpendiculaire à AB.

27. 2° *D'un même point* E, *pris dans une ligne* CD, *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

28. 3° *Et d'un même point* A, *pris hors d'une ligne* CD, *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Car on conçoit qu'il n'y a qu'un seul cas où une ligne, passant par le point E ou par le point A, puisse ne pencher ni vers ED ni vers EC.

29. *Les lignes qui, partant du point* A, *s'écarteront également de la perpendiculaire, seront égales; et plus ces lignes s'écarteront de la perpendiculaire, plus elles seront*

longues; et par conséquent la perpendiculaire est la plus courte de toutes.

Supposons que EG soit égale à EF; si l'on renverse la figure AEG sur la figure AEF, la ligne AE restant commune à toutes les deux, il est clair qu'à cause de l'angle AEG égal à AEF, la ligne EG s'appliquera sur EF, et que le point G tombera sur le point F, puisque EG est supposé égal à EF; donc AG s'appliquera exactement sur AF; donc ces deux lignes sont égales.

Quant à la seconde partie de la proposition, il est évident que le point C de la ligne CE, étant supposé plus loin de AB que le point F de la même ligne CE, est nécessairement plus éloigné de tel point de AB qu'on voudra, que le point F ne peut l'être du même point; donc AC est plus grande que AF; donc aussi la perpendiculaire est la plus courte de toutes.

30. Les lignes AF, AC, AG sont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire AE et de la ligne CD; et, en général, une ligne est oblique à une autre, quand elle fait avec cette autre un angle ou aigu ou obtus.

31. Puisque (29) les obliques AF, AG sont égales, lorsqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure que, *lorsqu'une ligne est perpendiculaire sur le milieu* E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ses points est autant éloigné de l'extrémité* F, *que de l'extrémité* G; car il est évident que ce qu'on a dit du point A s'applique également à tout autre point de la ligne AE ou AB.

32. Il n'est pas moins évident qu'*il n'y a que les points de la perpendiculaire* AE *sur le milieu de* FG, *qui puissent être également éloignés de* F *et de* G; car tout point qui sera à droite ou à gauche de la perpendiculaire, est évidemment plus près de l'un de ces points que de l'autre.

Donc, pour qu'une ligne soit perpendiculaire sur une autre, il suffit qu'elle passe par deux points dont chacun soit également éloigné de deux points pris dans cette autre.

33. Concluons de là, 1° que *pour élever une perpendicu-*

laire sur le milieu d'une ligne AB (fig. 12), il faut poser une pointe du compas en B, et, d'une ouverture plus grande que la moitié de AB, tracer un arc IK; poser ensuite la pointe du compas en A, et, de la même ouverture, tracer un arc LM qui coupe le premier au point C, qui sera également éloigné de A et de B. On déterminera ensuite, de la même maniere, un autre point D, soit au-dessous, soit au-dessus de AB, et en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin on tirera, par les deux points C et D, la ligne CD qui (32) sera perpendiculaire sur le milieu de AB.

34. 2° *Si d'un point* E, *pris hors de la ligne* AB (fig. 13), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne*, on placera la pointe du compas en E, et, d'une ouverture plus grande que la plus courte distance à la ligne AB, on tracera, avec l'autre pointe, deux petits arcs qui coupent AB aux points C et D; puis, de ces deux points comme centres, et d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de CD, on tracera deux arcs qui se coupent en un point F, par lequel, et par le point E, on tirera la ligne EF, qui sera perpendiculaire sur AB (32), puisqu'elle aura deux points E et F également éloignés, chacun, des deux points C et D de la ligne AB.

35. Si le point E, par lequel on veut que la perpendiculaire passe, étoit sur la même ligne AB, on opéreroit encore de la même maniere. (*Voyez* fig. 14.)

Enfin, si le point E étoit tellement placé qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points C ou D, on prolongeroit la ligne AB, et on opéreroit encore de même. (*Voyez* figures 15 et 16.) La figure 16 est pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne AB.

Lorsqu'on a plusieurs perpendiculaires à tracer, pour abréger et pour éviter en même temps la confusion qui pourroit naître de la multitude des traits dont il faudroit alors charger le dessin, on emploie un instrument construit et vérifié d'après les méthodes précédentes; c'est l'équerre, qui est formée tantôt de deux regles perpendiculaires l'une à l'autre, et assemblées par une charniere, pour

pouvoir être pliées l'une sur l'autre lorsqu'on n'en fait point usage, tantôt d'une seule piece de bois ou de cuivre, dont deux côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre. On applique une des regles ou l'un des côtés de l'équerre sur la ligne proposée, en observant de faire glisser ce côté jusqu'à ce que le second passe par le point donné ; alors, faisant glisser le crayon ou la plume le long du second côté de l'équerre, on a la perpendiculaire demandée.

Sur le terrein, où l'on opere en grand, on substitue au compas des perches ou des cordeaux ; mais, quand on fait usage de ces derniers, il faut avoir l'attention de leur donner la même tension, autant qu'il est possible, pendant la même opération. Pour donner une idée de la maniere dont on les emploie, supposons qu'il s'agisse de placer le heurtoir d'une batterie. (fig. 186.)

Comme c'est la piece contre laquelle les roues de l'affût doivent porter quand on met le canon en batterie, elle doit être perpendiculaire à *la ligne* du tir, et par conséquent à la ligne du milieu de l'embrasure.

Pour lui donner cette disposition, on tracera sur sa surface, et parallèlement à sa longueur, une ligne BC, sur laquelle on prendra arbitrairement les parties égales AB, AC, et l'on placera le point A sur la ligne du tir ; ayant fixé aux points B et C deux cordeaux d'égale longueur, on fera tourner le heurtoir sur le point A, jusqu'à ce que leurs extrémités puissent se réunir en un même point D sur la ligne du tir. Le heurtoir BC sera perpendiculaire à la ligne du tir.

Des Paralleles.

36. Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites *paralleles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes paralleles ne font donc point d'angle entre elles.

Donc deux paralleles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre ; car il est évident que si en quelque endroit elles se trouvoient plus près qu'en un autre, elles seroient inclinées l'une à l'autre, et par conséquent elles pourroient enfin se rencontrer.

D'après ces notions, il est aisé d'établir les cinq propositions suivantes.

37. 1° *Lorsque deux lignes paralleles* AB *et* CD (fig. 17) *sont coupées par une troisieme ligne* EF (*qu'on appelle alors* sécante), *les angles* BGE, DHE *ou* AGH, CHF, *qu'elles forment d'un même côté, avec cette ligne, sont égaux.* Car les lignes AB et CD, n'ayant aucune inclinaison entre elles (36), doivent nécessairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute ligne à laquelle on les comparera.

38. 2° *Les angles* AGH, GHD *sont égaux.* Car on vient de voir que AGH est égal à CHF : or, CHF (20) est égal à GHD; donc AGH est égal à GHD.

39. 3° *Les angles* BGE, CHF *sont égaux.* Car BGE est égal à AGH (20); or, on a vu (37) que AGH est égal à CHF; donc BGE est égal à CHF.

40. 4° *Les angles* BGH, DHG *ou* AGH, CHG, *sont supplément l'un de l'autre ;* car BGD est supplément de BGE, qui (37) est égal à DHG.

41. 5° *Les angles* BGE, DHF *ou* AGE, CHF, *sont supplément l'un de l'autre;* car DHF a pour supplément DHG, qui (37) est égal à BGE.

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours lieu, lorsque deux lignes paralleles sont rencontrées par une troisieme; et réciproquement, *toutes les fois que deux lignes droites auront dans leur rencontre avec une troisieme l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles sont paralleles;* cela se démontre d'une maniere absolument semblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent servir à fixer ces propriétés dans la mémoire. Les angles BGE, FHC se nomment *alternes externes*, parcequ'ils sont de différents côtés de la ligne EF, et qu'ils sont tous deux hors des paralleles. Les angles AGH, GHD s'appellent *alternes internes*, parcequ'ils sont de différents côtés de la ligne EF, et tous deux entre

les paralleles. Les angles BGH, DHG s'appellent *internes d'un même côté*, parcequ'ils sont entre les paralleles, et d'un même côté de la sécante EF. Enfin, les angles BGE, DHF se nomment *externes d'un même côté*, parcequ'ils sont hors des paralleles, et d'un même côté de la sécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, 1° *que si deux angles* ABC, DEF (fig. 18), *tournés d'un même côté, ont leurs côtés paralleles, ils seront égaux*. Car, si l'on imagine le côté DE prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre BC en G, les angles ABC, DGC seront égaux (37), et, par la même raison, l'angle DGC sera égal à l'angle DEF; donc ABC est égal à DEF.

44. 2° *Que pour mener, par un point donné* C, *une ligne* CD (fig. 19) *parallele à une ligne* AB, il faut, par le point C, tirer arbitrairement la ligne indéfinie CEF, qui coupe AB en un point quelconque E; mener (selon ce qui a été enseigné (14)), par le point C, la ligne CD, qui fasse avec CE l'angle ECD égal à l'angle FEB que celle-ci fait avec AB; la ligne CD, tirée de cette maniere, sera parallele à AB (37).

Lorsqu'on a plusieurs paralleles à mener, on peut, pour abréger et pour éviter la multitude des traits, faire de l'équerre l'usage suivant.

On placera un côté de l'équerre sur la droite donnée, et, tenant l'autre côté appliqué contre une regle immobile, on fera glisser l'équerre le long de cette regle, jusqu'à ce que le premier côté passe par le point donné; la ligne tracée le long de ce même côté sera la parallele demandée.

Sur le terrain, pour mener une parallele à une ligne donnée, on s'y prend assez communément, en faisant en sorte que les deux lignes soient toutes deux perpendiculaires à une troisieme; c'est ainsi que si l'on demandoit (fig. 187) de mener une parallele à l'une des faces d'un bastion, et à une distance de 200 toises, on prendroit sur le prolongement de la face de ce bastion un point F, duquel on éleveroit sur ce prolongement même une perpendiculaire FA longue de 200 toises; et à l'extrémité A de celle-ci on éleveroit une perpendiculaire AB, qui seroit la parallele demandée.

Au reste, chacune des cinq propriétés établies ci-dessus peut fournir une maniere de mener une parallele.

45. Les perpendiculaires et les paralleles, dont nous venons de parler successivement, sont d'un usage très fréquent dans toutes les parties pratiques des mathématiques. Les perpendiculaires sont nécessaires dans la mesure des surfaces, et des solidités ou capacités des corps; elles reviennent à chaque pas dans toutes les opérations de l'architecture navale. Comme l'angle droit est facile à construire, on fait, autant qu'on le peut, dépendre la construction des figures plutôt des perpendiculaires que de toute autre ligne.

Les paralleles, outre leur grand usage dans la théorie pour démontrer facilement un grand nombre de propositions, sont la base de plusieurs opérations utiles. On les emploie beaucoup dans le pilotage, principalement pour marquer, sur les cartes marines, la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation; ce qu'on appelle *pointer* ou *faire le point*. Nous en dirons un mot par la suite.

Des Lignes droites considérées par rapport à la circonférence du Cercle; et des circonférences de Cercle considérées les unes à l'égard des autres.

46. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, sans qu'il soit besoin d'en donner une démonstration rigoureuse........

1° Qu'*une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

2° Que, *dans un même demi-cercle, la plus grande corde soutend toujours le plus grand arc, et réciproquement.*

On appelle en général *sécante* (fig. 20) toute ligne, comme DE, qui rencontre le cercle en deux points, et qui est en partie au dehors : et on appelle *tangente* celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence; telle est AB.

47. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un seul point.* Car, si elle la rencontroit en deux points, elle entreroit dans le cercle, puisque de ces deux points il seroit possible de tirer au centre deux rayons ou lignes

égales, entre lesquelles on peut toujours concevoir une perpendiculaire sur la ligne qui joint ces deux points; et comme cette perpendiculaire (29) est plus courte que chaçun des deux rayons, on voit que la tangente auroit des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle : elle entreroit donc dans le cercle; ce qui est contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'ensuit que le rayon CA (fig. 21), qui va au point d'attouchement, est la plus courte ligne qu'on puisse tirer du centre à la tangente; que, par conséquent (29), il est perpendiculaire à la tangente. Donc, réciproquement, *la tangente en un point quelconque* A *du cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA *qui passe par ce point.*

48. On voit donc que *pour mener une tangente en un point donné* A *sur le cercle,* il faut tirer à ce point un rayon CA, et mener à son extrémité une perpendiculaire, suivant la méthode donnée (35).

49. Donc, *si plusieurs cercles* (fig. 22) *ont leurs centres sur la même ligne droite* CA, *et passent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tangente commune la ligne* TG *perpendiculaire à* CA, *et se toucheront par conséquent tous.*

50. Ainsi, *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée, et qui touche un cercle donné* BAD (fig. 23) *en un point donné* A, il faut, par le centre C et par le point A, tirer le rayon CA qu'on prolongera indéfiniment; puis, du point A, vers T ou vers V (selon qu'on voudra que l'un des cercles embrasse l'autre ou ne l'embrasse point), porter la grandeur du rayon du second cercle; après quoi, du centre T ou V, et du rayon TA ou VA, on décrira la circonférence EF.

51. *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe toujours par le centre du cercle, et par le milieu de l'arc soutendu par cette corde* (fig. 24.)

Car elle doit passer par tous les points également éloignés des extrémités A et B (32) : or, il est évident que le centre est

également éloigné des deux extrémités A et B qui sont deux points de la circonférence; donc elle passe par le centre.

Il n'est pas moins évident qu'elle doit passer par le milieu de l'arc; car, si E est le milieu de l'arc, les arcs égaux AE, BE ayant des cordes égales (7), le point E est également éloigné de A et de B; donc la perpendiculaire doit passer par le point E.

52. Le centre, le milieu de l'arc et le milieu de la corde, étant tous trois sur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite passera par deux de ces trois points, on pourra conclure qu'elle passe par le troisième.

Et comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur le milieu de la corde, on doit encore conclure que, si une perpendiculaire sur une corde passe par l'un quelconque de ces trois points, elle passe nécessairement par les deux autres.

De ces propriétés on peut conclure,

53. 1° *Le moyen de diviser un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviser l'angle BAC (fig. 25) en deux parties égales, on décrira de son sommet A comme centre, et d'un rayon arbitraire, l'arc DE; puis, des points D et E pris successivement pour centres, et d'un même rayon, on tracera deux arcs qui se coupent en un point G, par lequel et par le point A on tirera AG, qui (32), étant perpendiculaire sur le milieu de la corde DE, divisera en deux parties égales l'arc DIE (51), et par conséquent aussi l'angle BAC, puisque les deux angles partiels BAG, CAG ont (12) pour mesure les deux arcs égaux DI, EI.

54. 2° *Le moyen de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite.*

Soient A, B, C (fig. 26), ces trois points; en tirant les lignes droites AB, BC, elles seront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Elevez une perpendiculaire (35) sur le milieu de AB;

faites la même chose sur le milieu de BC; le point C, où se couperont ces deux perpendiculaires, sera le centre; car ce centre doit être sur DE (51), et, par la même raison, il doit être sur FG; il doit donc être à leur rencontre I, qui est le seul point commun qu'aient ces deux lignes.

55. S'il étoit question de *retrouver le centre d'un cercle ou d'un arc déja décrit*, on voit donc qu'il n'y auroit qu'à marquer trois points à volonté sur cet arc, et opérer comme on vient de l'enseigner.

56. Puisqu'on ne trouve qu'un seul point I qui satisfasse à la question, il faut en conclure que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul cercle, et par conséquent que *deux circonférences de cercle ne peuvent se rencontrer en trois points sans se confondre*.

57. 3° *Le moyen de faire passer par un point donné* B (fig. 27 et 28) *une circonférence de cercle qui en touche une autre dans un point donné* A.

Il faut, par le centre C de la circonférence donnée, et par le point A où l'on veut qu'elle soit touchée, tirer le rayon CA qu'on prolongera de part ou d'autre, selon qu'il sera nécessaire; joindre le point A au point B, par lequel on veut que passe la circonférence cherchée; et élever sur le milieu de AB une perpendiculaire MN, qui coupera AC, ou son prolongement, en D. Ce point D sera le centre, et AD ou BD sera le rayon du cercle demandé; car, puisque la circonférence qu'on veut décrire doit passer par le point A et par le point B, son centre doit être sur MN (51); d'ailleurs, puisque cette même circonférence doit toucher l'autre en A, son centre doit être sur CA (49) ou sur son prolongement; il est donc au point d'intersection de CA et de MN.

58. Si, au lieu d'une circonférence, c'étoit une ligne droite qu'il s'agît de faire toucher en un point donné A (fig. 29), par un cercle passant par un point donné B, l'opération seroit la même, avec cette seule différence que la ligne AC seroit une perpendiculaire élevée au point A sur cette droite.

59. *Deux cordes paralleles* AB, CD (fig. 30), *interceptent, entre elles, des arcs égaux* AC, BD.

Car la perpendiculaire GI, qu'on abaisseroit du centre G sur AB, doit (51) diviser en deux parties égales chacun des deux arcs AIB, CID, puisqu'elle sera en même temps perpendiculaire sur AB, et sur sa parallele CD; donc, si des arcs égaux AI, DI on retranche les arcs égaux CI, DI, les arcs restants AC, BD doivent être égaux.

Concluons de là, que, quand une tangente HK est parallele à une corde AB, le point d'attouchement I est précisément au milieu de l'arc AIB.

Les propositions que nous avons établies (49, 56 et 57) ont leur application dans la fortification et dans le tracé des bouches à feu, et de plusieurs attirails d'artillerie; il y est souvent question d'arcs qui doivent se toucher ou toucher des lignes droites, et passer par des points donnés.

60. Les propositions que nous avons établies (50, 57 et 58) ont leur application dans l'architecture navale ou la construction des navires; il y est souvent question d'arcs qui doivent se toucher ou toucher des lignes droites, et passer par des points donnés. Ce que nous avons dit peut faciliter l'intelligence de quelques unes des méthodes qu'on y prescrit. L'architecture civile fait aussi, assez souvent, usage d'arcs qui se touchent.

61. La derniere proposition que nous venons de démontrer peut, entre autres usages, servir à mener une parallele à une ligne donnée.

Des Angles considérés dans le cercle.

62. Nous avons vu ci-dessus (12) quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous proposons ici n'est point de donner une nouvelle maniere de les mesurer, mais d'établir quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines opérations, que pour faciliter quelques démonstrations.

63. *Un angle* MAN (fig. 31 et 32), *qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes ou par une tangente et par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc* BFED *compris entre ses côtés.*

Menez, par le centre C, le diametre FH parallele au côté AM, et le diametre GE parallele au côté AN ; l'angle MAN (43) est égal à l'angle FCE ; il aura donc la même mesure que celui-ci qui a son sommet au centre, c'est-à-dire, qu'il aura pour mesure l'arc FE ; il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc FE est la moitié de l'arc BFED. Or, BF est égal à AH (59), à cause des paralleles AM, HF ; et à cause des paralleles AN et GE, l'arc ED est égal à AG ; donc ED plus BF valent AG plus AH, c'est-à-dire, GH ; mais GH, comme mesure de l'angle GCH, doit être égal à FE, mesure de l'angle FCE qui (20) est égal à GCH ; donc BF plus ED valent FE ; donc FE est la moitié de BFED ; donc l'angle MAN a pour mesure la moitié de l'arc BFED qu'il comprend entre ses côtés.

Cette démonstration suppose que le centre soit entre les côtés de l'angle, ou sur l'un des côtés ; mais si le centre étoit hors des côtés, comme il arrive pour l'angle MAL (fig. 32), il n'en seroit pas moins vrai que cet angle auroit pour mesure la moitié de l'arc BL compris entre ses côtés. Car, en imaginant la tangente AN, l'angle BAL vaut LAN moins MAN ; il a donc pour mesure la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire (puisque le centre est entre leurs côtés), la moitié de LEA moins la moitié de BEA, ou la moitié de BL.

64. Donc, 1° *tous les angles* BAE, BCE, BDE (fig. 33), *qui, ayant leur sommet à la circonférence, comprendront entre leurs côtés le même arc ou des arcs égaux, seront égaux*. Car ils auront chacun pour mesure la moitié du même arc BE (63).

65. 2° *Tout angle* BAC (fig. 34) *qui aura son sommet à la circonférence, et dont les côtés passeront par les extrémités d'un diametre, sera droit ou de* 90°. Car il comprendra

alors entre ses côtés la demi-circonférence BOC, qui est de 180°; et comme il doit en avoir la moitié pour mesure (63), il sera donc de 90°.

66. La proposition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre plusieurs autres usages, avoir les deux suivants.

67. 1° *Pour élever une perpendiculaire à l'extrémité* B *d'une ligne* FB (fig. 35), lorsqu'on ne peut prolonger assez cette ligne pour exécuter commodément ce qui a été enseigné (35); voici le procédé :

D'un point D pris à volonté hors de la ligne FB, et d'une ouverture égale à la distance DB, décrivez la circonférence ABCH qui coupe FB en quelque point A; par ce point et par le centre D, tirez le diametre ADC; du point C, où ce diametre coupe la circonférence, menez au point B la ligne CB; elle sera perpendiculaire à FB; car l'angle CBA qu'elle forme avec FB a son sommet à la circonférence, et ses côtés passent par les extrémités du diametre AC; cet angle est donc droit (65); donc CB est perpendiculaire sur FB.

68. 2°. *Pour mener d'un point donné* E (fig. 56), *hors du cercle* ABD, *une tangente à la circonférence de ce cercle.* Joignez le centre C et le point E par la droite CE; décrivez sur CE, comme diametre, la circonférence CAED; elle coupera la circonférence ABD en deux points A et D, par chacun desquels, et par le point E tirant les lignes DE et AE, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point E à la circonférence ABD.

Pour se convaincre que ces lignes sont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons CD et CA; les deux angles CDE, CAE ont chacun leur sommet à la circonférence ACDE, et les deux côtés de chacun passent par les extrémités du diametre CE; donc (65) ces angles sont droits; donc DE et AE sont perpendiculaires à l'extrémité des rayons CD et CA; donc (47) ces lignes sont tangentes en D et en A.

69. Si l'on prolonge le côté BA (fig. 31) indéfiniment vers I, on aura un angle NAI qui aura aussi son sommet à la circonférence; cet angle, qui n'est point formé par deux

cordes, mais seulement par une corde et par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour mesure la moitié de l'arc AD compris entre ses côtés, mais la moitié de la somme des deux arcs AD et AB soutendus par le côté AD et par le côté AI prolongé; car, DAI valant avec DAB deux angles droits, ces deux angles doivent avoir ensemble pour mesure la moitié de la circonférence : or, on vient de voir (63) que DAB avoit pour mesure la moitié de AD; donc DAI a pour mesure la moitié de AD et la moitié de AB.

70. *Un angle* BAC (fig. 37), *qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* BE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point D, où CA prolongé rencontre la circonférence, tirez DF parallele à AB; l'angle BAC est égal à FDC (37), et aura par conséquent la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire, la moitié de l'arc FBC (63), ou la moitié de BC plus la moitié de BF, ou (à cause que (59) BF est égal à DE), la moitié de BC plus la moitié de DE.

71. *Un angle* BAC (fig. 38), *qui a son sommet hors du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave* BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ses côtés.*

Du point D, où CA rencontre la circonférence, tirez DF parallele à AB.

L'angle BAC est égal à FDC (37); il aura donc la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire, la moitié de CF, ou la moitié de CB moins la moitié de BF, ou (à cause que BF est (59) égal à ED) la moitié de CB moins la moitié de ED.

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, si cet angle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, il a nécessairement son sommet à la circonférence; car, s'il l'avoit ailleurs, les propositions démontrées (70 et 71) feroient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour mesure. Donc, de quelque façon qu'on pose un même angle, si ses côtés (fig. 33) passent toujours par les mêmes points B et E de la circonfé-

rence, son sommet sera toujours sur quelque point de la circonférence. Donc, si deux regles AM, AN (fig. 39), fixément attachées l'une à l'autre, roulent ensemble dans un même plan, en touchant continuellement deux points fixes B et C, le sommet A décrira la circonférence d'un cercle qui passera par les deux points B et C.

Ceci peut servir, 1° *à décrire un cercle qui passe par trois points donnés* B, A, C (fig. 39), *lorsqu'on ne peut approcher du centre*. Il faudra joindre le point A aux deux points B et C, par deux regles AM, AN; fixer ces deux regles de maniere qu'elles ne puissent s'écarter l'une de l'autre; alors, en faisant mouvoir l'angle BAC de maniere que les regles AM, AN touchent toujours les points B et C, le sommet A décrira la circonférence demandée.

2° *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés proposé, et qui passe par deux points donnés* B *et* C; ce qui peut être nécessaire dans la pratique.

Pour cet effet, on retranchera de 360° le nombre des degrés que cet arc doit avoir, et, ayant pris la moitié du reste, on ouvrira les deux regles de maniere qu'elles fassent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux regles l'une à l'autre, et les faisant tourner autour de deux pointes fixées en B et C, l'arc BAC que le sommet décrira dans ce mouvement, sera du nombre de degrés proposé.

« Il est facile de voir pourquoi on fait l'angle BAC égal à la moitié du reste; c'est qu'il a pour mesure la moitié de BC, qui est la différence entre la circonférence entiere et l'arc BAC. »

Des Lignes droites qui renferment un espace.

73. Le moindre nombre de lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace, est trois; et alors cet espace se nomme *triangle rectiligne*, ou simplement *triangle*. ABC (fig 40) est un triangle, parceque c'est un espace renfermé par trois lignes droites; ou plus exacte-

ment, parceque c'est une figure qui n'a que trois angles.

Il est évident que dans tout triangle, la somme de deux côtés pris comme on le voudra, est toujours plus grande que le troisieme. AB plus BC, par exemple, valent plus que AC; parceque AC, étant la ligne droite qui va de A à C, est le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle dont les trois côtés sont égaux, se nomme triangle *équilatéral* (fig. 41).

Celui dont deux côtés seulement sont égaux, se nomme triangle *isocele* (fig. 42).

Et celui dont les trois côtés sont inégaux, se nomme triangle *scalene* (fig. 40).

74. *La somme des trois angles de tout triangle rectiligne vaut deux angles droits, ou* 180°.

Prolongez indéfiniment le côté AC vers E (fig. 40), et concevez la ligne CD parallele au côté AB.

L'angle BAC est égal à l'angle DCE (37), puisque les lignes AB et CD sont paralleles. L'angle ABC est égal à l'angle BCD par la seconde propriété des paralleles (38); donc les deux angles BAC et ABC valent ensemble autant que les deux angles BCD et DCE, c'est-à-dire, autant que l'angle BCE; mais BCE est supplément (17 et 19) de BAC; donc les deux angles BAC et ABC forment ensemble un supplément de BCA; donc ces trois angles valent ensemble 180°.

75. La démonstration que nous venons de donner prouve donc en même temps que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC *vaut la somme des deux intérieurs* BAC *et* ABC *qui lui sont opposés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74), 1° *qu'un triangle rectiligne ne peut avoir qu'un seul angle qui soit droit*; et alors on l'appelle triangle *rectangle* (fig. 43).

2° Qu'à plus forte raison *il ne peut avoir qu'un seul angle qui soit obtus*; dans ce cas, on l'appelle triangle *obtusangle* (fig. 44).

3° Mais *il peut avoir tous ses angles aigus ;* et alors il est dit triangle *acutangle* (fig. 45).

4° Que *connoissant deux angles ou seulement la somme de deux angles d'un triangle, on connoît le troisieme angle*, en retranchant de 180° la somme des deux angles connus.

5° Que *lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisieme angle de chacun est nécessairement égal ;* puisque les trois angles de chaque triangle valent 180°.

6° Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont toujours complément* (21) *l'un de l'autre.* Car, dès que l'un des angles du triangle est de 90°, il ne reste plus que 90° pour les deux autres ensemble.

76. Nous avons vu ci-dessus (54) qu'on pouvoit faire passer une circonférence de cercle toujours par trois points qui ne sont pas en ligne droite ; concluons-en que......

On peut toujours faire passer une circonférence de cercle par les sommets des trois angles d'un triangle. On appelle cela *circonscrire* un cercle à un triangle.

77. De là il est aisé de conclure, 1° que *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux ;* et réciproquement, *si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.*

Car, en faisant passer une circonférence par les trois angles A, B, C (fig. 46), si les angles ABC, ACB sont égaux, les arcs ADC, AEB, dont les moitiés leur servent de mesure (63), seront nécessairement égaux ; donc (7) les cordes AC, AB seront égales ; et réciproquement, si les côtés AC, AB sont égaux, les arcs ADC, AEB seront égaux ; donc les angles ABC, ACB, qui ont pour mesure la moitié de ces arcs, seront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et valent, par conséquent, chacun le tiers de 180° ou 60°.

78. 2° *Dans un même triangle* ABC (fig. 47), *le plus*

grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et réciproquement.

Car, si l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB, l'arc AC sera plus grand que l'arc AB, et par conséquent la corde AC plus grande que la corde AE. La réciproque se démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a plusieurs propositions dont la démonstration est fondée sur l'égalité de certains triangles qu'on y considere; il est donc à propos d'établir ici les caracteres auxquels on peut reconnoître cette égalité. Ils sont au nombre de trois.

80. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Que l'angle B du triangle BAC (fig. 48) soit égal à l'angle E du triangle EDF (fig. 49); que le côté AB soit égal au côté DE, et le côté BC égal au côté EF; voici comment on peut se convaincre que ces deux triangles sont égaux.

Concevez la figure ABC appliquée sur la figure DEF, de maniere que le côté AB soit exactement appliqué sur son égal DE; puisque l'angle B est égal à l'angle E, le côté BC tombera sur EF; et le point C tombera sur le point F, puisque BC est supposé égal à EF. Le point A étant sur D, et le point C sur F, il est donc évident que AC s'applique exactement sur DE, et que par conséquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc, pour construire un triangle dont on connoîtroit deux côtés et l'angle compris, on tirera (fig. 49) une ligne DE égale à l'un des côtés connus: sur cette ligne on fera (14) un angle DEF égal à l'angle connu, et, ayant fait EF égal au second côté connu, on tirera DF; ce qui achevera le triangle demandé.

81. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Que le côté AB (fig. 48) soit égal au côté DE (fig. 49), l'angle B égal à l'angle E, et l'angle A égal à l'angle D.

Concevez le côté AB appliqué exactement sur le côté DE; BC se couchera sur EF, puisque l'angle B est égal à l'angle E; pareillement, puisque l'angle A est égal à l'angle D, le côté AC se couchera sur DF; donc AC et BC se rencontreront au point F; donc les deux triangles sont égaux.

Donc, pour construire un triangle dont on connoîtroit un côté et les deux angles adjacents, on tirera (fig. 49) une ligne DE égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne, on fera (14) les angles E et D égaux aux deux angles connus; alors les côtés EF, DF de ces angles termineront, par leur rencontre, le triangle demandé.

82. La proposition (81) peut servir à démontrer que *les parties* AC, BD (fig. 50), *de deux paralleles interceptées entre deux autres paralleles* AB, CD, *sont égales.*

Abaissez les deux perpendiculaires AE, BF; les angles AEC, BFD sont égaux, puisqu'ils sont droits; et à cause des paralleles AC et BD, AE et BF, l'angle EAC est égal à l'angle FBD (43). D'ailleurs, AE est égal à BF (36); donc les deux triangles AEC, BFD sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc AC est égal à BD.

On démontrera de même que, si AC est égal et parallele à BD, AB sera égal et parallele à CD; car, outre le côté AC égal à BD, et l'angle droit en E ainsi qu'en F, l'angle ACE sera égal à BDF, puisque AC est parallele à BD (37); donc (75) le troisieme angle EAC sera égal au troisieme angle DBF; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc AE est égal à BF, et par conséquent les deux lignes sont paralleles : or, de là et de ce qu'on vient de démontrer (82), il s'ensuit que AB est égal à CD.

83. *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Que le côté AB (fig. 48) soit égal au côté DE (fig. 49),

le côté BC égal au côté EF, et le côté AC égal au côté DF.

Concevez le côté AB exactement appliqué sur DE, et le plan BAC couché sur le plan de la figure DEF; je dis que le point C tombe sur le point F.

Décrivez des points D et E comme centres, et des rayons DF et EF, les deux arcs IK et HG qui se coupent en F; il est évident que le point C doit tomber sur quelque point de IK, puisque AC est égal à DF; par une semblable raison, le point C doit tomber sur quelque point de GH, puisque BC est égal à EF; il doit donc tomber sur le point F, qui est le seul point commun que ces deux arcs puissent avoir d'un même côté de DE; donc les deux triangles conviennent parfaitement, et sont par conséquent égaux.

Donc, pour construire un triangle dont on connoîtroit les trois côtés, il faut (fig. 49) tirer une droite DE égale à l'un des côtés connus; du point D comme centre, et d'un rayon égal au second côté connu, décrire l'arc IK; pareillement, du point E comme centre, et d'un rayon égal au troisieme côté connu, décrire l'arc GH; enfin, du point d'intersection F, tirer aux points D et E les droites FD et FE.

Des Polygones.

84. Une figure de plusieurs côtés s'appelle en général un *polygone*.

Lorsqu'elle a 3 côtés, on l'appelle *triangle* ou *trilatere*;
lorsqu'elle en a 4, *quadrilatere*;
5, *pentagone*;
6, *hexagone*;
7, *eptagone*;
8, *octogone*;
9, *ennéagone*;
10, *décagone*.

Nous n'étendons pas davantage la liste de ces noms, parcequ'une figure est aussi bien désignée en énonçant le nombre de ses côtés, qu'en employant ces différents noms, dont

le grand nombre chargeroit assez inutilement la mémoire
nous n'exposons ceux-ci queparcequ'ils se rencontrent plu
fréquemment que les autres.

On appelle angle *saillant* celui dont le sommet est hor
de la figure ; la figure 51 a tous ses angles saillants.

L'angle *rentrant* est, au contraire, celui dont le somme
entre dans la figure ; l'angle CDE (fig. 52) est un angl
rentrant.

Les propriétés des polygones ont une application assez fréquent dans la fortification. Les termes d'*angle saillant*, *angle rentrant*, y son particulièrement appliqués aux angles du chemin couvert et des ligne de retranchement.

On appelle *diagonale* une ligne tirée d'un angle à un autre dans une figure quelconque. AD, AC (fig. 51) sont des dia gonales.

85. *Tout polygone peut être partagé, par des diagonale menées d'un de ses angles, en autant de triangles moin deux qu'il a de côtés.*

L'inspection des figures 51 et 52 suffit pour faire senti que cela est vrai généralement.

86. Donc, *pour avoir la somme de tous les angles inté rieurs d'un polygone quelconque, il faut prendre* 180 *autan de fois moins deux qu'il y a de côtés.*

Car il est évident que la somme des angles intérieurs de polygones ABCDE (fig. 51) et ABCDEF (fig. 52) est la même que celle des angles des triangles ABC, ACD, etc Or, la somme des trois angles de chacun de ces triangles es de 180 degrés ; il faut donc prendre 180° autant de fois qu'i y a de triangles, c'est-à-dire (85), autant de fois moins deu qu'il y a de côtés.

Remarque. Dans la figure 52, l'angle CDE, pour êtr compris dans la proposition précédente, doit être compté non pas pour la partie CDE extérieure au polygone, mai pour la partie CDE composée des angles ADE, ADC ; c'es un angle de plus de 180°, et qu'on ne doit pas moins consi

dérer comme angle, que tout autre angle au-dessous de 180°. Car un angle n'est en général (10) que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe; et, soit qu'elle tourne de plus ou de moins que 180°, la quantité dont elle a tourné est toujours un angle.

87. *Si l'on prolonge, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrants, la somme de tous les angles extérieurs vaudra 360°, quelque nombre de côtés qu'ait le polygone.* (*Voyez* fig. 51.)

Car chaque angle extérieur est le supplément de l'angle intérieur qui lui est contigu; ainsi les angles tant intérieurs qu'extérieurs valent autant de fois 180° qu'il y a de côtés; mais (86) les intérieurs ne different de cette somme que de deux fois 180° ou 360°; il reste donc 360° pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone *régulier* celui qui a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux. (*Voyez* fig. 53.)

Il est donc toujours facile de savoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier; car, ayant trouvé par la proposition enseignée (86) combien valent ensemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviser cette valeur totale par le nombre des côtés: par exemple, si l'on demande combien vaut chaque angle intérieur d'un pentagone régulier; comme il y a 5 côtés, je prends 180° 5 fois moins deux, c'est-à-dire, 3 fois; ce qui donne 540° pour la valeur des 5 angles intérieurs; donc, puisqu'ils sont tous égaux, chacun doit valoir la cinquieme partie de 540°, c'est-à-dire, 108°.

89. De la définition du polygone régulier, il suit qu'*on peut toujours faire passer une même circonférence de cercle par tous les angles d'un polygone régulier.*

Car il est prouvé (54) qu'on peut faire passer une circonférence de cercle par les trois points A, B, C (fig. 53); or, je dis qu'elle passe aussi par l'extrémité du côté CD; en effet, il est facile de prouver que le point D, où cette circonférence doit rencontrer le côté CD, est éloigné de C d'une quantité égale à BC; car l'angle ABC étant égal à

BCD, les arcs AEC, BFD, dont les moitiés servent de mesure à ces angles (63), doivent être égaux : retranchant de chacun l'arc commun AF, ED, les arcs restants CD et AB doivent être égaux ; donc aussi (7) les cordes CD et AB sont égales ; donc le point D', où le côté CD est rencontré par la circonférence qui passe par A, B', C, est le même que le sommet de l'angle du polygone. On démontrera la même chose des angles E et F.

90. On voit donc que, *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier, la question se réduit à faire passer un cercle par les sommets de trois de ses angles* ; ce qui se fait de la maniere enseignée (64).

91. *Toutes les perpendiculaires abaissées du centre d'un polygone régulier, sur les côtés, sont égales.* Car ces perpendiculaires OH, OL devant tomber sur le milieu de chaque côté (52), les lignes AH et AL seront égales ; or, AO est commun aux deux triangles OHA et OLA ; d'ailleurs, à cause des triangles ABO, AOF, qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles OAH, OAL sont égaux ; donc les deux triangles OAH, OAL, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (80). Donc OH est égal à OL.

Donc, si d'un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence est dite *inscrite* au polygone.

Les perpendiculaires OH, OL s'appellent, chacune, l'*apothême* du polygone.

92. Il est clair que, si du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entre elles des angles égaux, puisque ces angles auront pour mesure des arcs qui sont soutendus par des cordes égales ; donc, *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviser* 360° *par le nombre des côtés.* Car ces angles égaux ont tous ensemble pour mesure la circonférence entiere. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre sera la sixieme partie de 360°, c'est-à-dire, sera de 60°.

93. Donc *le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle circonscrit.* Car, en tirant les rayons AO et BO, le triangle AOB sera isocele, et par conséquent (77) les deux angles BAO et ABO seront égaux : or, comme l'angle AOB est de 60°, les deux autres doivent valoir ensemble 120° (75); donc chacun d'eux est de 60°; les trois angles sont donc égaux, et par conséquent le triangle est équilatéral (77); donc AB est égal au rayon AO.

94. Nous n'en dirons pas davantage sur les polygones réguliers, dont les autres propriétés sont d'ailleurs très faciles à déduire de celles qu'on vient d'exposer; la seule chose que nous ajouterons, est l'usage de la derniere proposition pour la division de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diametres AB, DE (fig. 54) perpendiculaires l'un à l'autre, et, ayant pris une ouverture de compas égale au rayon CE, on la portera successivement de E en F, et de A en G; le quart de la circonférence AE sera, par ce moyen, divisé en trois parties égales AF, FG, GE; car, puisqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il suit de ce qui vient d'être dit (93), que l'arc EF est de 60°; or, EA est de 90°; donc AF est de 30°. Par la même raison, AG est de 60°; et comme AE est de 90°, GE est donc de 30°; enfin, si de l'arc total AE de 90°, vous retranchez les arcs AF et GE qui valent ensemble 60°, l'arc restant FG sera de 30°. Ayant ainsi divisé le quart de circonférence en arcs de 30°, il sera facile d'avoir l'arc de 15°, en divisant en deux parties égales chacun des arcs AF, FG, GE par la méthode donnée (53). On fera les mêmes opérations sur chacun des trois autres quarts AD, DB et BE.

Si l'on vouloit conduire cette division jusqu'à l'arc de 1°, il faudroit y aller par tâtonnement; car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement jusqu'à l'arc de 3°; mais, comme les propositions qui y conduisent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons seulement que ce que nous entendons ici

par opérations géométriques, ce sont celles dans lesquelles la chose dont il s'agit peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la regle et le compas seuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matiere sur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici quelques propositions sur les proportions, qui sont une suite immédiate de ce que nous avons enseigné dans l'Arithmétique. Mais pour abréger le discours, nous conviendrons, pour l'avenir, que lorsque deux quantités devront être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce signe +, qui équivaudra au mot *plus*; ainsi 4 + 3 signifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement, pour marquer la soustraction, nous nous servirons de ce signe —, qui équivaudra au mot *moins*; ainsi 5 — 2 signifiera 5 moins 2, ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'est pas toujours question de faire réellement les opérations, mais de raisonner sur des circonstances de ces opérations, il est souvent plus utile de les représenter que d'en donner le résultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous servirons de ce signe ×, qui équivaudra à ces mots *multiplié par*; ainsi 5 × 4 signifiera 5 multiplié par 4.

Et pour marquer la division, nous ferons comme en arithmétique : nous écrirons le dividende et le diviseur en forme de fraction, dont le dividende sera numérateur, et le diviseur, dénominateur; ainsi $\frac{12}{7}$ marquera 12 divisé par 7.

Cela posé, nous avons vu (Arith. 185) que, dans toute proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent; et qu'il en est de même de la différence des antécédents, comparée à celle des conséquents.

96. Nous pouvons donc conclure de là que, *dans toute proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme la différence des antécédents est à la*

différence des conséquents; car, puisque dans la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, par exemple, on a (Arith. 185)

$$48 \times 12 : 16 \times 4 :: 12 : 4$$
$$\text{et } 48 - 12 : 16 - 4 :: 12 : 4,$$

il est évident (à cause du rapport commun de $12 : 4$) qu'on peut conclure $48 + 12 : 16 + 4 :: 48 - 12 : 16 - 4$. Le raisonnement est le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant dans cette derniere proportion le troisieme terme à la place du second, et le second à la place du troisieme, ce qui est permis (Arith. 182), dire aussi que *la somme des antécédents est à leur différence, comme la somme des conséquents est à leur différence.*

98. Si, dans la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, on échange les places des deux moyens, ce qui donnera $48 : 12 :: 16 : 4$, et qu'on applique à celle-ci la proposition qu'on vient de démontrer (96), on aura $48 + 16 : 12 + 4 :: 48 - 16 : 12 - 4$, qui, à l'égard de la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, fournit cette proposition : *La somme des deux premiers termes d'une proportion est à la somme des deux derniers termes, comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers*; ou (en mettant le troisieme terme à la place du second, et le second à la place du troisieme) *la somme des deux premiers termes est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

99. *Si un rapport est composé du produit de plusieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports composants, substituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les substituera.*

Par exemple, dans le rapport de $6 \times 10 : 2 \times 5$, on peut, au lieu des facteurs 6 et 2, substituer 3 et 1, ce qui donnera le rapport composé $3 \times 10 : 1 \times 5$, qui est le même que le rapport $6 \times 10 : 2 \times 5$. En effet, puisque $6 : 2 :: 3 : 1$, on peut, sans changer cette proportion (Arith. 183), multiplier les antécédents par 10 et les con-

séquents par 5, et alors on aura $6\times 10 : 2\times 5 :: 3\times 10 : 1\times 5$.

Il est facile de voir que ce raisonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux ou un plus grand nombre de proportions sont telles, que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent se trouve égal au conséquent de l'autre, on pourra, lorsqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui se trouveront communs d'antécédent à son conséquent; par exemple, si on a les deux proportions

$$6 : 4 :: 12 : 8,$$
$$4 : 3 :: 20 : 15,$$

on pourra conclure $6 : 3 :: 12\times 20 : 8\times 15$.

Car, quand on admettroit le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3, qu'on auroit alors, ne différeroit pas du rapport de 6 à 3 (Arith. 170) que l'on a en omettant ce facteur.

De même, si on a $6 : 3 :: 12 : 8,$
$$4 : 3 :: 20 : 15,$$
$$3 : 7 :: 21 : 49,$$

on en conclura $6 : 7 :: 12\times 20\times 21 : 8\times 15\times 49$.

La même chose aura lieu pour les seconds rapports, et par la même raison.

Cette observation est utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorsque ce rapport doit être composé; parcequ'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, et qui ne doivent plus rester après la démonstration.

Nous allons maintenant transporter aux lignes les connoissances que nous avons tirées des nombres, sur les proportions. Mais, pour rendre nos démonstrations plus courtes et plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particuliere à ces lignes, sinon dans quelques applications : au reste, on peut toujours s'aider par des comparaisons avec des nombres.

Les rapports que nous considérerons ici sont les rapports géométriques. Ainsi, quand nous dirons : Une telle ligne est à une telle ligne, comme 5 est à 4, par exemple, on doit entendre que la premiere contient la seconde autant que 5 contient 4.

101. *Si sur un des côtés* AZ d'un angle quelconque ZAX (fig. 55), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, etc., *de telle grandeur et en tel nombre qu'on voudra; et si, après avoir tiré à volonté, par l'un* F *des points de division, la ligne* FL *qui rencontre le côté* AX *en* L, *on mene par les autres points de division, les lignes* BG, CH, DI, EK, etc., *paralleles à* FL; *je dis que les parties* AG, GH, HI, etc. *du côté* AX, *seront aussi égales entre elles.*

Menons par les points G, H, I, etc., les lignes GM, HN, IO, etc., parallèles à AZ; les triangles ABG, GMH, HNI, IOK, etc., seront tous égaux entre eux; car, 1° les lignes GM, HN, IO, etc., sont, chacune, égales à AB, puisque (82) elles sont égales à BC, CD, DE, etc.; 2° les angles GMH, HNI, IOK, etc., sont tous égaux entre eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle ABG (43); 3° les angles MGH, NHI, OIK, etc., sont tous égaux entre eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle BAG (43).

Tous les triangles BAG, MGH, NHI, etc, ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; ils sont donc tous égaux; donc les côtés AG, GH, HI, etc. de ces triangles, sont tous égaux entre eux; donc la ligne AX est, en effet, divisée en parties égales par les paralleles.

Il est donc évident que si AB est telle partie que ce soit de AG, BC sera une semblable partie de GH; CD sera une semblable partie de HI; si, par exemple, AB est les deux tiers de AG, BC sera les deux tiers de GH, et ainsi de suite.

Il en sera de même de 2, 3, 4, etc., parties de AF comparées à 2, 3, 4, etc., parties de AL; donc une portion quelconque AD ou DF de la ligne AF est même partie de

ligne BCDEF, *qui passera par tous ces points, sera une ligne droite parallele à* GL.

107. Les propositions enseignées (102 et suiv.) sont également vraies, lorsque la ligne BF, au lieu d'être entre le point A et la ligne GL, comme dans la figure 57, tombe au-delà du point A, comme dans la figure 58. Car tout ce qui a été dit de la figure 55, et qui sert de base aux propositions établies (102 et suiv.), auroit également lieu pour les paralleles qui couperoient ZA et XA prolongées, dans la fig. 55.

De la similitude des Triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou, en général, de deux figures semblables, ceux qui ont des positions semblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

Lorsqu'on dit que deux triangles ou deux figures semblables ont les côtés proportionnels, on entend que chaque côté de la premiere figure contient le côté homologue de la seconde toujours le même nombre de fois; en sorte que dans les proportions qu'on en déduit, lorsqu'on a comparé un côté de la premiere au côté homologue de la seconde, il faut former le second rapport, en comparant de même un autre côté de la premiere au côté homologue de la seconde; ou bien, si on a d'abord comparé l'un à l'autre deux côtés de la premiere figure, les deux côtés que l'on doit comparer pour former le second rapport doivent être homologues à ceux-là, et pris dans le même ordre; c'est-à-dire, que l'antécédent du second rapport doit être côté homologue de l'antécédent du premier.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.*

Si les deux triangles ADI, AFL (fig. 59 et 60) sont tels que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, l'angle D égal à l'angle F, et l'angle I égal à l'angle L; je dis qu'on aura AD : AF :: AI : AL :: DI : FL.

Car, puisque l'angle A du premier est égal à l'angle A du second, on peut appliquer ces deux triangles l'un sur l'autre

de la maniere représentée dans la figure 56; alors, puisque l'angle D est égal à l'angle F, les lignes DI et FL seront paralleles (42); donc, selon ce qui a été dit (102), on aura AD : AF :: AI : AL.

Tirons maintenant, par le point I, la droite IH parallele à AF; selon ce qui a été dit (102), on voit que AI : AL :: FH : FL, ou (à cause que FH est égal à DI (82) :: DI : FL; donc AD : AF :: AI : AL :: DI : FL.

Comme on peut échanger les places des moyens, on peut dire aussi AD : AI :: AF : AL, et AI : DI :: AF : FL.

110. Puisque (74), lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisieme angle est nécessairement égal au troisieme angle; concluons-en que *deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

111. On a vu (43) que deux angles qui ont les côtés paralleles, et qui sont tournés d'un même côté, sont égaux; donc *deux triangles qui ont les côtés paralleles ont les angles égaux chacun à chacun, et ont par conséquent* (109) *les côtés proportionnels.*

Donc aussi *deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ont aussi ces mêmes côtés proportionnels;* car, si on fait faire un quart de révolution à l'un de ces triangles, ses côtés deviendront paralleles à ceux du second.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 43), *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC (*qu'on appelle* hypothénuse), 1° *les deux triangles* ADB, ADC *seront semblables entre eux et au triangle* BAC; 2° *la perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD *et* DC *de l'hypothénuse;* 3° *chaque côté* AB *ou* AC *de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment correspondant* BD *ou* DC.

Car les deux triangles ADB, ADC ont chacun un angle droit en D, comme le triangle BAC en a un en A; d'ailleurs,

ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle BAC, puisque l'angle B appartient tout à-la-fois au triangle ADB et au triangle BAC; pareillement, l'angle C appartient tout à-la-fois au triangle ADC et au triangle BAC; donc (110) ces trois triangles sont semblables. Donc (109), comparant les côtés homologues des deux triangles ADB et ADC, on aura

BD : AD :: AD : DC;

comparant les côtés homologues des deux triangles ADB, BAC, on aura

BD : AB :: AB :: BC;

enfin, comparant les côtés homologues des triangles ADC et BAC, on aura

CD : AC :: AC : BC,

où l'on voit que AD est (Arith. 174) moyenne proportionnelle entre BD et DC; AB moyenne proportionnelle entre BD et BC; et enfin AC moyenne proportionnelle entre CD et BC.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont aussi les deux autres angles égaux, et sont par conséquent semblables.*

Si les deux triangles ADI, AFL (fig. 59 et 60) sont tels que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, et qu'en même temps les côtés qui comprennent ces angles soient tels qu'on ait AD : AF :: AI : AL; je dis qu'ils seront semblables; c'est-à-dire, qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun, et leurs troisiemes côtés DI et FL en même rapport que AD et AF, ou que AI et AL.

Car on peut appliquer l'angle A du triangle sur l'angle A du triangle AFL, de la maniere représentée par la figure 56. Or, puisqu'on suppose que AD : AF :: AI : AL, les deux droites AF et AL sont donc coupées proportionnellement aux points D et I; donc DI est parallele à FL (105); donc

(37) l'angle AFL est égal à l'angle ADI, et l'angle ALF est égal à l'angle AID.

De là et de ce qui a été dit (109), il suit que DI : FL :: AD : AF :: AI : AL.

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont les angles égaux chacun à chacun, et sont par conséquent semblables.*

Si on suppose (fig. 61 et 62) que DE : AB :: EF : BC :: DF : AC; je dis que l'angle D est égal à l'angle A, l'angle E égal à l'angle B, et l'angle F égal à l'angle C.

Imaginons qu'on ait construit sur DE un triangle DGE, dont l'angle DEG soit égal à l'angle B, et l'angle GDE à l'angle A; le triangle DEG sera semblable au triangle ABC (110); donc (109) DE : AB :: GE : BC :: DG : AC; mais, par la supposition, on a DE : AB :: EF : BC :: DF : AC; donc, à cause du rapport commun de DE : AB, on aura GE : BC :: DG : AC :: EF : BC :: DF : AC, d'où l'on peut tirer ces deux proportions :

GE : BC :: EF : BC
et DG : AC :: DF : AC.

Donc, puisque les deux conséquents sont égaux entre eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédents seront aussi égaux entre eux; donc GE est égal à EF, et DG égal à DF. Le triangle DEG a donc ses trois côtés égaux à ceux du triangle DEF; il est donc (83) égal à ce triangle DEF : or, on vient de voir que le triangle DEG est semblable à ABC; donc DEF est aussi semblable à ABC.

115. Nous avons prouvé ci-dessus (111) que, quand la ligne DI (fig. 56) est parallele au côté FL, les deux triangles ADI et AFL sont semblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puisse être l'angle A, on doit donc conclure (fig. 57) que les triangles AGH, AHI, AIK, AKL sont semblables aux triangles ABC, ACD, ADE, AEF chacun à chacun, et que, par conséquent (109), KL : EF :: AK : AE :: KI : DE :: AI : AD :: IH : CD ::

AH : AC :: GH : BC; donc, en ne tirant de cette suite de rapports que ceux qui renferment des parties des lignes GL et BF, on aura KL : EF :: KI : DE :: IH : CD :: GH : BC; c'est-à-dire, que *si d'un point* A *on tire à différents points d'une ligne droite* GL *plusieurs autres lignes droites*, *ces lignes couperont toute parallele à* GL *de la même maniere qu'elles coupent* GL, *c'est-à-dire, en parties qui auront entre elles les mêmes rapports que les parties correspondantes de* GL.

116. Les principes que nous venons d'exposer sont la base de toutes les parties des mathématiques théoriques ou pratiques. Comme il importe de se rendre ces principes familiers, nous insisterons un peu sur leur usage, tant par cette vue que parceque cela nous fournira l'occasion d'expliquer plusieurs pratiques utiles.

117. La proposition enseignée (101) fournit un moyen bien naturel de diviser une ligne donnée en parties égales, ou en parties qui aient entre elles des rapports donnés. Supposons que AR (fig. 55) soit une ligne qu'on veut diviser en deux parties qui aient entre elles un rapport donné, par exemple, celui de 7 à 3; on tirera par le point A, et sous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie AZ, et, ayant pris arbitrairement une ouverture de compas AB, on la portera dix fois le long de AZ; je suppose que Q soit l'extrémité de la derniere partie, on joindra les extrémités Q et R de la ligne AQ, et de la ligne donnée AR; alors, si par le point D, extrémité de la troisieme division, on tire DI parallele à QR, la ligne AR sera divisée en deux parties RI et AI, qui seront entre elles :: 7 : 3; car (101 et 102) elles sont entre elles :: DQ : AD que l'on a faites de 7 et de 3 parties.

On voit, par là, que si l'on vouloit diviser la ligne AR en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 5 parties qui fussent entre elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2, on ajouteroit tous ces nombres entre eux, ce qui donneroit 21; on porteroit 21 ouvertures de compas sur la ligne AZ, et on

tireroit des paralleles à la ligne QR, par les extrémités de la 7e, 5e, 4e, 3e, 2e division.

118. Si les rapports étoient donnés en ligne, on mettroit toutes ces lignes bout à bout sur la ligne AZ.

On voit donc ce qu'il y auroit à faire, si l'on vouloit diviser la ligne AR en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviser doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même est petite, le plus léger défaut dans les paralleles influe beaucoup sur l'égalité ou l'inégalité des parties; c'est pourquoi il ne sera pas inutile d'exposer la méthode suivante.

119. *fg* (fig. 63) est la ligne qu'il s'agit de diviser en parties égales, en 6, par exemple; on tirera une ligne indéfinie BC, sur laquelle on portera six fois de suite une même ouverture de compas arbitraire : soit BC la ligne qui comprend ces six parties, on décrira sur BC un triangle équilatéral BAC, en décrivant des deux points B et C comme centres, et de l'intervalle BC comme rayon, deux arcs qui se coupent en A. Sur les côtés AB, AC, on prendra les parties AF, AG égales chacune à *fg*; et ayant tiré FG, cette ligne sera égale à *fg*; on menera, du point A à tous les points de division de BC, des lignes droites qui couperont FG de la même maniere que BC est coupée.

Car les lignes AF, AG étant égales entre elles, et les lignes AB, AC aussi égales entre elles, on a AB : AF :: AC : AG; donc AB, AC sont coupées proportionnellement en F et G; donc FG est parallele à BC, et par conséquent (111) le triangle FAG est semblable à ABC; donc FAG est équilatéral; donc FG est égal à AF, et par conséquent à *fg*; de plus, FG étant parallele à BC, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point A à la droite BC.

Ce que nous venons d'exposer peut servir à former et à diviser l'échelle qui doit servir lorsqu'on veut réduire une figure du grand au petit; mais l'échelle la plus commode dans un grand nombre d'opérations, est celle qu'on appelle

moitié de CB, puisque ED est moitié de EC; donc FG ou FE—BF : $\frac{1}{2}$BC :: BF : AB.

2° On peut s'y prendre de cette autre maniere pour mesurer les distances.

Supposons qu'il soit question de mesurer la distance d'un point B de la tranchée (fig. 190), pris sur la capitale de la demi-lune, au sommet A de l'angle saillant du chemin couvert.

On fera BC perpendiculaire à AB, et d'une longueur arbitraire. On plantera un piquet en un point E de BC, tel que CE soit égal à BE, ou en soit partie aliquote, comme la moitié, le tiers, etc.; alors on s'éloignera sur la ligne CD perpendiculaire à BC, jusqu'à ce que de son extrémité D on voie le piquet E se confondre avec le point A. Alors AB sera égal à CD, si on a fait BE égal à CE; et AB sera le double ou le triple de CD, si l'on a fait CE la moitié ou le tiers de BE. Cela est évident, si l'on fait attention que les lignes CD et AB étant paralleles, les triangles ABE, ECD sont semblables.

3° S'agit-il de mesurer une distance inaccessible AB (fig. 191)?

On prendra un point C tellement situé qu'on puisse, de ce point, voir les deux points A et B, et mesurer sur les alignements des parties CD, CE qui soient les plus approchantes qu'il sera possible de CA et CB, quoiqu'à la rigueur on puisse les prendre petites à l'égard de CA et CB.

Par les moyens qu'on vient d'enseigner, ou par d'autres semblables qu'on peut imaginer d'après ceux-là, on déterminera la longueur de CA et celle de CB; puis, ayant placé sur les alignements CA et CB les piquets D et E, de maniere que CD soit à CE :: CA : CB (ce qui est facile, puisque l'on connoît CA et CB, et que l'on peut prendre arbitrairement CD), on mesurera DE; alors on aura AB par cette proportion CD : DE :: CA : AB, fondée sur ce que les deux triangles CAB, CDE, ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels, sont semblables (113).

4° S'il est question de mener par un point connu C (fig. 193), sur le terrein (n'ayant autre chose que des piquets), une parallele à une ligne inaccessible AB.

Ayant pris arbitrairement le point D, on prendra sur l'alignement AD un point E, qui soit en même temps dans l'alignement de B et C. De ce point E, on menera une parallele EG à la ligne supposée accessible DB; puis du point C on menera GCF parallele à AD, et qui rencontrera BD en un point F. Sur EG, on marquera un point H

tel angle qu'on voudra, on tirera, par le point A et le point I, la droite AIL que l'on coupera par une ligne FL parallele à DI; cette parallele sera le quatrieme terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, le quatrieme terme s'appelle alors *troisieme proportionnel,* parcequ'il n'y a que trois quantités différentes dans la proportion. Ainsi, quand on demande une troisieme proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre qu'on demande le quatrieme terme d'une proportion dans laquelle la seconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, et l'opération est la même que celle qu'on vient d'enseigner.

La théorie des lignes proportionnelles et des triangles semblables est la base d'un grand nombre d'opérations de la géométrie-pratique. Nous ferons connoître les principales; mais nous ne parlerons, pour le présent, que de celles qui peuvent être exécutées sans la mesure des angles, c'est-à-dire, uniquement avec le secours de piquets et de cordeaux. Nous parlerons des autres, lorsqu'à l'occasion de la trigonométrie nous aurons fait connoître les instruments qui servent à mesurer les angles.

1° Supposons qu'on ait dessein de jeter un pont sur une riviere, et que dans cette vue on veuille connoître la largeur AB de cette riviere (fig. 189).

Dans l'alignement de AB, et à une distance BC qui soit au moins le tiers de la largeur AB estimée grossièrement, on plantera un piquet C, et l'on mesurera BC. A droite ou à gauche de BC, et suivant telle direction qu'on le voudra d'ailleurs, on mesurera une distance quelconque CE (la plus longue sera la meilleure). On fixera le milieu D de CE, et ayant déterminé le point F, qui est en même temps dans l'alignement BE et dans l'alignement AD, on mesurera BF et FE. Alors on déterminera AB par cette proportion, $\frac{1}{2}$BE — BF : $\frac{1}{2}$BC :: BF : AB.

En effet, si par le milieu D on conçoit DG parallele à AB, le point G, où elle rencontrera BE, sera (102) le milieu de BE, et FG sera par conséquent égale à FE — BF. Mais les triangles FGD et ABF semblables, à cause des paralleles, donnent FG : GD :: BF : AB. D'ailleurs, à cause des triangles semblables EDG, ECB, on a DG

GA et HB de ces deux points au-dessus de l'axe. Alors les triangles semblables GAC et HBC donnent GA : HB :: AC : BC ; d'où (Arith. 184) on conclut GA — HB : HB :: AB : BC, où tout est connu, excepté BC.

121. Les propositions enseignées (109, 113 et 114) peuvent servir à résoudre ce problême général : *Etant données trois des six choses* (angles et côtés) *qui entrent dans un triangle, trouver les trois autres, pourvu que parmi les trois choses connues il y ait un côté.*

Nous allons en donner quelques exemples.

Supposons qu'étant au point B (fig. 65) dans la campagne, on veut savoir quelle distance il y a de ce point B à un objet A dont on ne peut approcher.

On plantera un piquet à une certaine distance BC que l'on mesurera, et qu'on fera à-peu-près égale à BA estimée grossièrement ; puis, avec le graphometre que nous avons décrit (23), on mesurera les angles ABC, ACB que font avec la ligne BC les deux lignes qu'on imaginera aller de ses extrémités au point A. Cela posé, on tirera sur le papier une ligne *bc* (fig. 66) qu'on fera d'autant de parties d'une échelle que l'on construira arbitrairement, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de pieds dans BC, si l'on a mesuré en pieds ; et avec le rapporteur décrit (22), on fera au point *b* un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle B, et au point *c* un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle C ; alors les deux lignes *ab*, *ac* se rencontreront en un point *a* qui représentera le point A ; en sorte que si vous mesurez *ab* sur votre échelle, le nombre de parties que vous lui trouverez sera le nombre de pieds que contient AB. Car les deux angles *b* et *c* ayant été faits égaux aux deux angles B et C, le triangle *bac* est semblable au triangle BAC (110), et par conséquent leurs côtés sont proportionnels.

C'est ainsi qu'on peut mesurer la distance d'une isle à une côte, lorsqu'on peut observer cette isle de deux points de cette côte, dont la distance seroit connue.

122. Par la proposition démontrée (114), on peut se dispenser de mesurer les angles, dans le cas dont nous venons de parler. En effet, il suffit, après avoir planté un piquet en un point E (fig. 65), qui soit sur l'alignement des points A et B, et un autre en un point F qui soit sur l'alignement des deux points A et C, il suffit, dis-je, de mesurer les lignes BC, BE, CE, BF et CF; alors on fera un triangle *bec* (fig. 66) dont les côtés *bc*, *be*, *ce* aient autant de parties d'une même échelle, que BC, BE, CE ont de pieds; on fera de même sur *bc* un autre triangle *bcf* dont les côtés *bf*, *cf* aient autant de parties de l'échelle, que BF et CF ont de pieds; alors, prolongeant les côtés *be* et *cf*, ils se rencontreront en un point *a*, qui représentera le point A; en sorte que mesurant *ba* sur l'échelle, on jugera par le nombre de parties qu'on trouvera, combien de pieds doit avoir AB.

En effet, le triangle *bec* ayant les côtés proportionnels à ceux du triangle BEC, ces deux triangles doivent avoir les angles égaux; donc l'angle EBC ou ABC est égal à l'angle *ebc* ou *abc*; la même raison prouve que l'angle FCB ou ACB est égal à l'angle *fcb* ou *acb*; donc les deux triangles ACB et *acb* sont semblables.

On voit en même temps que, par cette construction, on peut déterminer les angles ABC et ACB, en mesurant, avec le rapporteur, les angles *abc* et *acb* sur le papier.

Au reste, quoique ces expédients et beaucoup d'autres qu'on peut facilement imaginer d'après eux puissent être souvent utiles, nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps, parceque la trigonométrie, que nous enseignerons par la suite, nous fournira des moyens plus expéditifs et plus susceptibles de précision; car, quoique les opérations que nous venons de décrire soient rigoureusement exactes dans la théorie, elles ne donnent cependant qu'une exactitude assez bornée dans la pratique, parceque les erreurs qu'on peut commettre dans la figure *abc*, toutes petites qu'elles puissent être, peuvent influer sensiblement sur les

conclusions qu'on en tire pour la figure ABC, qui est toujours incomparablement plus grande.

Des Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

123. Deux lignes sont dites coupées en raison *inverse* ou *réciproque*, lorsque, pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une se trouvent être les extrêmes, et les deux parties de l'autre, les moyens de la proportion.

Et deux lignes sont dites réciproquement proportionnelles à leurs parties, lorsqu'une de ces lignes et sa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne et sa partie forment les moyens.

124. *Deux cordes* AC *et* BD (fig. 67) *qui se coupent dans le cercle, en quelque point* E *que ce soit, et sous quelque angle que ce soit, se coupent toujours en raison réciproque*, c'est-à-dire, que AE : BE :: DE : CE.

Car, si l'on tire les cordes AB, CD, on forme deux triangles BEA, CED qu'il est aisé de démontrer être semblables; puisqu'outre l'angle BEA égal à CED (20), l'angle ABE ou ABD est égal à l'angle DCE ou DCA; car ces deux angles ont leur sommet à la circonférence, et s'appuient sur le même arc AD (63). Donc les triangles BEA et CED sont semblables (110); donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels, c'est-à-dire, que AE : BE :: DE : CE, où l'on voit que les parties de la corde AC sont les extrêmes, et les parties de la corde BD sont les moyens.

125. Puisque la proposition qu'on vient de démontrer a lieu, quelque part que soit le point E, et sous quelque angle que se coupent les deux cordes AC et BD, elle a donc lieu aussi lorsque les deux cordes (fig. 68) sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que l'une des deux, AC par exemple, passe par le centre : or, dans ce cas, la corde BD étant coupée en deux parties égales (51), les deux termes moyens de la proportion AE : BE :: DE : CE deviennent égaux, et

la proportion se change en cette autre, AE : BE :: BE : CE; donc *toute perpendiculaire* BE, *abaissée d'un point* B *de la circonférence sur le diametre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AE, CE *de ce diametre.*

126. Cette proposition a plusieurs applications utiles. Nous n'en exposerons qu'une pour le présent; c'est pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* ae, ec (fig. 70).

On tirera une droite indéfinie AC, sur laquelle on placera bout à bout deux lignes AE, EC égales aux deux lignes *ae*, *ec*; et ayant décrit sur la totalité AC, comme diametre, le demi-cercle ABC, on élevera au point de jonction E la perpendiculaire EB sur AC; cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle demandée.

127. *Deux sécantes* AB, AC (fig. 69), *qui, partant d'un même point* A *hors du cercle, vont se terminer à la partie concave de la circonférence, sont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AE, *à quelque endroit que soit le point* A *hors du cercle, et quelque angle que fassent entre elles ces deux sécantes.*

Concevez les cordes CD et BE, vous aurez deux triangles ADC, AEB, dans lesquels, 1° l'angle A est commun; 2° l'angle B est égal à l'angle C, parceque l'un et l'autre ont leur sommet à la circonférence, et embrassent le même arc DE (63); donc (110) ces deux triangles sont semblables, et ont par conséquent les côtés proportionnels : donc AB : AC :: AE : AD; d'où l'on voit que la sécante AB et sa partie extérieure AD forment les extrêmes, tandis que la sécante AC et sa partie extérieure AE forment les moyens.

128. Puisque cette proposition est vraie, quel que soit l'angle BAC, si l'on conçoit que le côté AB demeurant fixe, le côté AC tourne autour du point A pour s'écarter de AB, les deux points de section E et C s'approcheront continuellement l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin la droite AC tombant sur la tangente AF, ces deux points se confondront, et AC, AE deviendront chacune égale à AF; en sorte que

la proportion AB : AC :: AE : AD deviendra AB : AF :: AF : AD; donc

129. *Si d'un point* A, *pris hors du cercle, on mene une sécante quelconque* AB, *et une tangente* AF, *cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante* AB *et la partie extérieure* AD *de cette même sécante.*

130. Cette proposition peut, entre autres usages, servir à *couper une ligne en moyenne et extrême raison.* On dit qu'une ligne AB (fig. 71) est coupée en moyenne et extrême raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties AC, BC, telles que l'une BC de ces parties est moyenne proportionnelle entre la ligne entiere AB et l'autre partie AC, c'est-à-dire, telles que l'on ait

AC : BC :: BC : AB.

Voici comment on y parvient. On éleve à l'une A des extrémités une perpendiculaire AD égale à la moitié de AB: du point D comme centre, et d'un rayon égal à AD, on décrit une circonférence qui coupe en E la ligne BD qui joint les deux points B et D. Enfin on porte BE de B en C, et la ligne AB est coupée en moyenne et extrême raison au point C.

En effet, la ligne AB étant perpendiculaire sur AD, est tangente (48); et puisque BF est sécante, on a (129) BF : AB :: AB : BE ou BC. Donc (Arith. 185) BF — AB : AB — BC :: AB : BC : or, AB est égal à FE, puisque AB est double de AD; donc BF — AB est égal à BE ou BC; et comme AB — BC est AC, on a donc BC : AC :: AB : BC, ou (Arith. 181) AC : BC :: BC : AB.

Des Figures semblables.

131. Deux figures d'un même nombre de côtés sont dites *semblables*, lorsqu'elles ont les angles homologues égaux et les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures ABCDE, *abcde* (fig. 72 et 73) sont semblables, si l'angle A est égal à l'angle *a*, l'angle B égal

l'angle *b*, l'angle C égal à l'angle *c*, et ainsi de suite ; et si en même temps le côté AB contient le côté *ab* autant que BC contient *bc*, autant que CD contient *cd*, et ainsi de suite.

Ces deux conditions sont nécessaires à-la-fois dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions suffise, parcequ'elle entraîne nécessairement l'autre (109 et 114).

132. *Si de deux angles homologues* A *et* a, *de deux polygones semblables, on mene des diagonales* AC, AD, ac, ad *aux autres angles, les deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.*

Car l'angle B est, par la supposition, égal à l'angle *b*, et le côté AB : *ab* :: BC : *bc*; donc les deux triangles ABC, *abc*, qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables (113); donc l'angle BCA est égal à l'angle *bca*, et AC : *ac* :: BC : *bc*.

Si des angles égaux BCD, *bcd*, on ôte les angles égaux BCA, *bca*, les angles restants ACD, *acd* seront égaux. Or, BC : *bc* :: CD : *cd*; donc, puisqu'on vient de prouver que BC : *bc* :: AC : *ac*, on aura CD : *cd* :: AC : *ac*; donc les deux triangles ACD, *acd* sont aussi semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On prouvera la même chose, et de la même maniere, pour les triangles ADE et *ade*, et pour tous les autres triangles qui suivroient, si ces polygones avoient un plus grand nombre de côtés.

133. *Si deux polygones* ABCDE, abcde, *sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ils seront semblables.*

Car les angles B et E sont égaux aux angles *b* et *e*, dès que les triangles sont semblables; et par cette même raison, les angles partiels BCA, ACD, CDA, ADE sont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux BCD, CDE sont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs, la similitude des triangles fournit cette suite de rapports égaux, AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC :

ac :: CD : *cd* :: AD : *ad* :: DE : *de* :: AE : *ae*; ne tirant de cette suite que les rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*. Donc ces polygones ont aussi les côtés homologues proportionnels; donc ils sont semblables.

Donc, pour construire une figure semblable à une figure proposée ABCDE (fig. 72), et qui ait pour côté homologue à AB une ligne donnée, on portera cette ligne donnée sur AB, de A en *f*; par le point *f*, on tirera *fg* parallele à BC, et qui rencontre AC en *g*; par le point *g*, on menera *gh* parallele à CD, et qui rencontre AD en *h*; enfin, par le point *h*, on tirera *hi* parallele à ED, et l'on aura le polygone A*fghi* semblable à ABCDE.

134. *Les contours de deux figures semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces figures*; c'est-à-dire, que la somme des côtés de la figure ABCDE contient la somme des côtés de la figure *abcde*, autant que le côté AB contient le côté *ab*.

Car, dans la suite de rapports égaux AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*, la somme des antécédents est (Arith. 186) à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, :: AB : *ab*; or, il est évident que ces sommes sont les contours des deux figures.

135. Si l'on conçoit la circonférence ABCDEFGH (fig. 74) divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra, et si, ayant tiré du centre I, aux points de division, des rayons IA, IB, etc., on écrit d'un autre rayon I*a*, la circonférence *abcdefgh*, rencontrée par ces rayons aux points *a*, *b*, *c*, *d*, etc., il est évident que si dans chaque circonférence on joint les points de division par des cordes, on formera deux polygones semblables; car les triangles ABI, *ab*I, etc. sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en I compris entre deux côtés proportionnels; car IA étant égal à IB, et I*a* égal à I*b*, on a évidemment AI : BI :: *a*I : *b*I, et la même chose se démontre de même pour les autres triangles. De là et de ce qui vient d'être dit (134),

on conclura donc que le contour ABCDEFGH est au contour *abcdefgh* :: AB : *ab*, ou (à cause des triangles semblables ABI, *ab*I) :: AI : *a*I. Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu, lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini : or, dans ce cas, on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit; donc les circonférences mêmes ABCDEFGH, *abcdefgh* seront entre elles :: AI : *a*I, c'est-à-dire, comme leurs rayons, et par conséquent aussi comme leurs diametres.

136. Concluons donc, 1° *qu'on peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

2° *Les cercles sont des figures semblables.*

3° *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diametres.*

137. En général, si dans deux polygones semblables on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, et terminées à des points semblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes, qu'on appelle *lignes homologues*, seront entre elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car, dès qu'elles font des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront aussi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques, puisque les angles de deux polygones semblables sont égaux chacun à chacun : or, si dans ce cas elles n'étoient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il est facile de sentir que les points où elles se terminent ne pourroient pas être semblablement placés comme on le suppose.

138. C'est sur les principes que nous venons de poser, concernant les figures semblables, que porte en grande partie l'art de lever les plans. Nous disons en grande partie, parceque, lorsque l'espace dont il s'agit de former le plan est d'une très grande étendue, comme l'Europe, la France, etc., l'art d'en fixer les points principaux tient à d'autres con-

noissances, dont ce n'est point encore ici le lieu de parler. Mais pour les détails d'un pays, d'une côte, d'une rade, etc., on peut les déterminer et les représenter ensuite sur un plan, de la maniere que nous allons décrire. Observons auparavant que nous supposons ici que tous les angles qu'il va être question de mesurer sont tous dans un même plan horizontal, ou à-peu-près. S'ils n'y étoient point, il faudroit, avant de former le plan, les y réduire; nous en donnerons les moyens dans la trigonométrie.

Supposons donc que A, B, C, D, E, F, G, H, I, K (fig. 75) soient plusieurs objets remarquables dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossièrement sur un papier ces objets dans les positions qu'on leur juge à l'œil; et, pour cet effet, on se transportera aux différents lieux où il sera nécessaire, pour prendre une connoissance légere de tous ces objets. Ce premier dessin, qu'on appelle un *croquis*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base AB, dont la longueur ne soit pas moindre que la dixieme ou la neuvieme partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on puisse voir de ses extrémités, et qui soit telle en même temps, que de ces mêmes extrémités on puisse appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra; alors, avec un instrument propre à mesurer les angles, avec le graphometre, par exemple, on mesurera au point A les angles EAB, FAB, GAB, CAB, DAB que font au point A, avec la ligne AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce point aux objets E, F, G, C, D que je suppose pouvoir être apperçus des extrémités A et B de la base. On mesurera de même au point B les angles EBA, FBA, GBA, CBA, DBA que font en ce point, avec la ligne AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point B aux mêmes objets que ci-dessus. S'il y a des objets, comme H, I, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités A et B, on se transportera en deux des lieux EF

qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces deux points H et I; alors, regardant EF comme une base, on mesurera les angles HEF, IEF, HFE, IFE que font avec cette nouvelle base les lignes qui iroient de ses extrémités aux deux objets H et I; enfin, s'il y a quelque autre objet, comme K, qu'on n'ait pu voir ni des extrémités de AB, ni de celles de EF, on prendra encore pour base quelque autre ligne, comme FG, qui joint deux des points observés, et on mesurera de même à ses extrémités les angles KFG, KGF.

Toutes ces opérations faites, et après avoir déterminé et construit l'échelle du plan qu'on se propose de faire, on tirera sur ce plan une ligne *a b* qu'on fera d'autant de parties de l'échelle que l'on a trouvé de toises ou de pieds dans AB, selon qu'on aura mesuré en toises ou en pieds. On fera ensuite au point *a*, avec le rapporteur, un angle *bae* d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvé pour BAE, et au point *b* un angle *eba* d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvé à l'angle EBA; les deux lignes *ae*, *be*, qui formeront ces angles avec *ab*, se couperont en un point *e* qui représentera sur la carte la position de l'objet E sur le terrein; car, par cette construction, le triangle *abe* sera semblable au triangle ABE, puisqu'on a fait deux angles de celui-là égaux à deux angles de celui-ci (110). On se conduira précisément de la même maniere pour déterminer les points *f*, *g*, *d*, *c*, qui doivent représenter les points ou objets F, G, D, C. Pour avoir ensuite les points *h*, *i* et *k*, on tirera les lignes *ef* et *fg* que l'on considérera comme bases, et on déterminera la position des points *h* et *i* à l'égard de *ef*, et du point *k* à l'égard de *fg*, de la même maniere qu'on a déterminé celles des autres points à l'égard de *a b*. Bien entendu que toutes les lignes qu'on tirera dans ces différentes opérations seront tracées au crayon seulement, parcequ'elles n'ont d'autre usage que de déterminer les points *c*, *d*, *e*, etc.; lorsqu'ils sont une fois trouvés, on efface tout le reste.

Je ne m'arrête pas à démontrer en détail que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* sont placés entre eux de la même maniere que les objets C, D, E, F, G, etc. le sont entre eux; il suffit d'observer que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g* sont, par la construction, placés à l'égard de *ab*, comme les points C, D, E, F, G le sont à l'égard de AB, puisque les triangles *cab*, *dab*, *eab*, etc. ont été faits semblables aux triangles CAB, DAB, EAB, et disposés de la même maniere; ainsi la difficulté, s'il y en a, ne peut tomber que sur les points *h*, *i* et *k* : or, par la construction, les points *h* et *i* sont placés à l'égard de *ef*, comme les points H et I le sont à l'égard de EF; donc, puisque ces deux dernieres lignes sont placées de la même maniere à l'égard des lignes *a b* et AB, les points *h* et *i* seront aussi placés à l'égard de *a b* de la même maniere que H et I le sont à l'égard de AB. Ainsi les distances respectives des points *a*, *e*, *f*, *g*, etc., mesurées sur l'échelle du plan, feront connoître les distances des objets A, E, F, G, etc.

On voit assez, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, que cette même méthode peut servir à vérifier des points que l'on soupçonneroit douteux sur une carte, ainsi qu'à y ajouter des points qu'on auroit omis.

On peut aussi employer la boussole à déterminer la position des objets E, F, G, etc., et on l'y emploie même assez souvent; mais alors on observe au point A, non pas les angles EAB, FAB, mais les angles que les lignes AE, AF, etc., et la base même AB, font avec la direction de l'aiguille aimantée; on fait la même chose au point B; et pour marquer les objets sur la carte, on tire par le point *a* une ligne qui représente la direction de l'aiguille aimantée, et on mene les lignes *ab*, *ac*, *af*, etc., de maniere qu'elles fassent avec celle-là les angles qu'on a observés au point A; fixant ensuite la grandeur qu'on veut donner à *a b*, on se conduit à l'égard du point *b* de la même maniere qu'on a fait à l'égard du point *a*. Quant aux autres points H et I, qui n'étoient point visibles de A et B, on les détermine, à l'égard de EF, de la même maniere qu'on a déterminé les autres à l'égard de AB;

enfin on marque ces points en *h* et *i*, en les déterminant, à l'égard de *ef*, de la même maniere que les autres points *e*, *f*, etc. ont été déterminés à l'égard de *ab*. Au reste, on ne doit, autant qu'on le peut, lever ainsi à la boussole que les petits détails, comme les détours d'un chemin, les sinuosités d'une riviere, etc. Quand les points principaux ont été déterminés avec exactitude, on peut prendre ces détails avec une attention moins scrupuleuse, parceque les objets qu'on releve alors étant peu distants entre eux, l'erreur qu'on peut commettre sur les angles ne peut pas être de grande conséquence.

Lorsque quelques circonstances déterminent à marquer sur la carte déja construite quelque nouveau point, il n'est pas indispensable d'observer ce point, de deux autres points connus : on le détermine souvent, au contraire, en observant de ce point deux autres points connus; par exemple, supposons que le point H soit un point d'une rade où l'on a mesuré la profondeur à la sonde, et qu'on veut marquer cette sonde sur la carte; on observera du point H les angles EHM, FHM que font avec la direction LM de l'aiguille aimantée les deux lignes EH, FH, qui vont à deux objets connus E, F; puis, pour marquer le point H sur la carte, on tirera à part (fig. 77.) une ligne *lm* qui marque la direction de l'aiguille aimantée; et en un point *n* de cette ligne, on fera les angles *onm*, *pnm* égaux aux angles EHM, FHM; enfin, par le point *f*, on menera *fh* parallele à *pn*; et par le point *e*, la ligne *eh* parallele à *no*; ces deux lignes se rencontreront au point cherché *h*.

Cette même méthode sert aussi à se reconnoître en mer, à la vue de deux terres. Au reste, la rose des vents, qui est marquée sur les cartes marines, fournit des expédients pour abréger quelques unes de ces opérations; nous ne pouvons entrer dans ces détails, qui appartiennent immédiatement au pilotage : il nous suffit d'exposer les principes sur lesquels ces différentes pratiques sont fondées.

Observons cependant qu'on ne doit déterminer les sondes

de cette maniere, que quand les circonstances ne permettent pas de faire autrement; car, quelque exercé qu'on puisse être à se servir du compas de variation, on ne parvient jamais à relever du point H, en mer, les objets E, F, avec une précision sur laquelle on puisse autant compter que sur le relèvement qu'on feroit d'un objet H, tel que seroit une chaloupe, une bouée, etc., en observant des points E et F à terre. Les sondes sont assez importantes pour qu'on doive, autant qu'on le peut, employer, pour les déterminer, la méthode la plus susceptible d'exactitude.

Il y a encore une autre maniere de lever qui est d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même temps qu'on observe les différents points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument qu'on emploie à cet effet est représenté par la figure 78. ABCD est une planche de 15 à 16 pouces de long et à-peu-près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphometre. Sur cette planche, on étend une feuille de papier qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. LM est une regle garnie de pinnules à ses deux extrémités.

Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne, on prend une base *am*, comme dans les opérations ci-dessus, et, posant le pied de l'instrument en *a*, on fait planter un piquet en *m*. On applique la regle LM sur le papier, et on la dirige de maniere à voir le piquet *m* à travers les deux pinnules : alors on tire le long de la regle une ligne EF, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan qu'on aura trouvé de pieds entre le point E, d'où l'on observe d'abord, et le point *f*, d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la regle autour du point E, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant à travers les pinnules, quelqu'un des objets I, H, G; et à mesure qu'on en rencontre un, on tire le long de la regle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lors-

qu'on est en *a*, on transporte l'instrument en *m*, et on laisse un piquet en *a* : alors on fait au point *f* les mêmes opérations à l'égard des objets I, H, G, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes *fi*, *fh*, *fg*, qui, dans ce second cas, vont ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premieres aux points *g*, *h*, *i*, qui sont la représentation des objets G, H, I.

C'est encore sur la théorie des figures semblables qu'est fondée la méthode de faire *le point*, c'est-à-dire, de représenter sur une carte la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation ou pendant une partie de sa navigation.

Supposons qu'un vaisseau parti d'un lieu connu ait d'abord couru 28 lieues au sud-est, puis 20 lieues au sud, et enfin 26 lieues au sud-ouest; on veut déterminer sur la carte la *route* qu'a tenue le vaisseau et le lieu de l'arrivée.

On cherche d'abord sur la carte le point du départ; je suppose que ce soit le point *d* (fig. 79). On cherche pareillement parmi les divisions de la rose des vents marquée sur la carte, quelle est la ligne qui va au sud-est; je suppose que ce soit ici la ligne CF; on tire par le point *d* la ligne *dc* parallele à CF, et on donne à *dc* autant de parties de l'échelle de la carte, que l'on a couru de lieues au sud-est. Par le point *c*, on tire pareillement une ligne *cb* parallele à la ligne CE qui est dirigée au sud, et on fait *cb* d'autant de parties de l'échelle qu'on a couru de lieues au sud; enfin, par le point *b*, on mene *ba* parallele à CD qui va au sud-ouest; et ayant fait *ba* d'autant de parties de l'échelle qu'on a couru de lieues au sud-ouest, le point *a* est le point d'arrivée, et la trace *dcba* représente la route qu'a tenue le vaisseau. En effet, les lignes *dc*, *cb*, *ba* font entre elles les mêmes angles qu'ont faits entre elles successivement les différentes parties de la route du vaisseau, et d'ailleurs les parties *cd*, *cb*, *ba* ont entre elles les mêmes rapports que les espaces que le vaisseau a réellement décrits; donc la figure *dcba* est (131) absolument semblable à la route qu'a tenue le vaisseau; enfin, le point *d* est situé sur la carte comme le point de

départ l'est à l'égard de la terre (1); donc *dcba* est non seulement semblable à la route du vaisseau, mais encore située à l'égard des différents points de la carte, comme la route du vaisseau l'a été à l'égard des différents points de la terre.

SECTION II.

Des Surfaces.

139. Nous voici arrivés à la seconde des trois sortes d'étendue que nous avons distinguées; c'est-à-dire, à l'étendue en longueur et en largeur.

Nous ne considérerons, dans cette section, que les *surfaces* ou *superficies planes*; nous nous bornerons même à celles des figures rectilignes et du cercle.

La mesure des surfaces se réduit à celle des triangles ou des quadrilateres.

On distingue les quadrilateres en *quadrilatere* simplement dit, *trapeze* et *parallélogramme*.

La figure de quatre côtés, qu'on appelle simplement *quadrilatere*, est celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui soit parallele à un autre. (*Voyez* fig. 80.)

Le *trapeze* est un quadrilatere dont deux côtés seulement sont paralleles (fig. 81).

Le *parallélogramme* est un quadrilatere dont les côtés opposés sont paralleles (fig. 82, 83, 84, 85, 86, 86*); on

---

(1) Cette expression n'est pas rigoureusement exacte, sans doute; mais ce n'est point ici le lieu d'en fixer le sens rigoureux. Les points d'une carte, surtout d'une carte réduite, ne sont pas situés entre eux comme les points de la terre qu'ils représentent; mais il suffit ici qu'ils aient le même usage. Nous reviendrons ailleurs sur cet objet.

distingue quatre sortes de parallélogrammes : le *rhomboïde*, le *rhombe*, le *rectangle* et le *carré*.

Le *rhomboïde* est le parallélogramme dont les côtés contigus et les angles sont inégaux (fig. 82).

Le *rhombe*, autrement dit *lozange*, est celui dont les côtés sont égaux, et les angles inégaux (fig. 83).

Le *rectangle* est celui dont les angles sont égaux, et les côtés contigus inégaux (fig. 84).

Le *carré* est celui dont les côtés et les angles sont égaux (fig. 85).

Quand les angles d'un quadrilatere sont égaux, ils sont nécessairement droits, parceque les quatre angles de tout quadrilatere valent ensemble quatre angles droits (86).

La perpendiculaire EF (fig. 82), menée entre les deux côtés opposés d'un parallélogramme, s'appelle la *hauteur* de ce parallélogramme; et le côté BC, sur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *base*.

La hauteur d'un triangle ABC (fig. 87, 88 et 89) est la perpendiculaire AD abaissée d'un angle A de ce triangle, sur le côté opposé BC, prolongé s'il est nécessaire; et ce côté BC se nomme alors la *base*.

140. *Un triangle rectiligne quelconque* ABC (fig. 89) *est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.*

Car on peut toujours concevoir tirée, par le sommet de l'angle C, une ligne CE parallele au côté BA, et par le sommet de l'angle A, une ligne AE parallele au côté BC, ce qui forme avec les côtés AB et BC un parallélogramme ABCE de même base et de même hauteur que le triangle ABC; cela posé, il est aisé de voir que les deux triangles ABC, CEA sont égaux; car le côté AC leur est commun. D'ailleurs, les angles BAC, ACE sont égaux, à cause des paralleles (38); et par la même raison, les angles BCA et CAE sont égaux; ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont donc égaux; donc le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCE.

141. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF (fig. 86 et 86*), *de même base et de même hauteur, sont égaux en surface.*

Les deux parallélogrammes ABCD, EBCF (fig. 86) ont une partie commune EBCD; ainsi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles ABE, DCF : or, il est aisé de prouver que ces deux triangles sont égaux; car AB est égal à CD, ces lignes étant des paralleles comprises entre paralleles (82); et par la même raison, BE est égal à CF; d'ailleurs (43), l'angle ABE est égal à l'angle DCF : ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc aussi le parallélogramme ABCD et le parallélogramme EBCF sont égaux.

Dans la figure 86*, on démontrera de la même maniere que les deux triangles ABE, DCF sont égaux; donc, retranchant de chacun le triangle DIE, les deux triangles restants ABID, EICF seront égaux; enfin, ajoutant à chacun de ces trapezes le triangle BIC, le parallélogramme ABCD et le parallélogramme EBCF qui en résulteront seront égaux.

142. On peut donc dire aussi que *les triangles de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux*, puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur qu'eux (140).

143. De cette derniere proposition, on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un triangle de même surface.* Par exemple, soit ABCDE (fig. 91) un pentagone; si l'on tire la diagonale EC qui joigne les extrémités de deux côtés contigus ED, DC, et qu'après avoir mené DF parallele à EC, et qui rencontre en F le côté AE prolongé, on tire CF, on aura un quadrilatere ABCF égal en surface au pentagone ABCDE; car les deux triangles ECD, ECF ont pour base commune EC; et étant de plus compris entre les mêmes paralleles EC, DF, ils sont de même hauteur; donc ils sont égaux; donc, si l'on ajoute à chacun le

quadrilatere EABC, on aura le pentagone ABCDE égal au quadrilatere ABCF.

Or, de même qu'on vient de réduire le pentagone à un quadrilatere, on réduira de même le quadrilatere à un triangle; donc, etc.

Pour transformer un triangle en un carré de même surface, la question se réduit à prendre (126) ou (Arith. 178) une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur, puisque (Arith. 178) le carré de cette moyenne proportionnelle sera égal au produit de ces deux facteurs.

On peut donc transformer une figure quelconque en un carré de même surface.

De la Mesure des Surfaces.

144. *Mesurer une surface*, c'est déterminer combien de fois cette surface contient une autre surface connue.

Les mesures qu'on emploie sont ordinairement des carrés; quelquefois aussi ce sont des parallélogrammes rectangles : ainsi mesurer la surface ABCD (fig. 90), c'est déterminer combien elle contient de carrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd*; si le côté *ab* du carré *abcd* est d'un pied, c'est déterminer combien la surface ABCD contient de pieds carrés : si le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* est de 3 pieds, c'est déterminer combien la surface ABCD contient de rectangles de 3 pieds de long sur un pied de large.

Pour mesurer en parties carrées la surface du rectangle ABCD, il faut chercher combien de fois le côté AB contient le côté *ab* du carré *abcd* qui doit servir d'unité ou de mesure, chercher de même combien de fois le côté BC contient *ab*; et alors, multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de carrés tels que *abcd*, que la surface ABCD peut renfermer. Par exemple, si AB contient *ab* quatre fois, et si BC contient *ab* sept fois, je multiplie 7 par 4, et le produit 28 marque que le rectangle ABCD contient 28 carrés tels que *abcd*.

Car, si par les points de division E, F, G, on mene des

paralleles à BC, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de carrés tels que *abcd*, qu'il y a de parties égales à *ab* dans le côté BC; donc il faut répéter les carrés contenus dans l'un de ces rectangles autant de fois qu'il y a de rectangles, c'est-à-dire, autant de fois que le côté AB contient *ab;* et comme le nombre des carrés contenus dans chaque rectangle est le même que le nombre des parties de BC, il est donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de BC par le nombre des parties égales de AB, on a le nombre des carrés tels que *abcd,* que le rectangle ABCD peut renfermer.

Quoique nous ayons supposé, dans le raisonnement que nous venons de faire, que les côtés AB et BC contenoient un nombre exact de mesures *ab*, ce raisonnement ne s'étend pas moins au cas où la mesure *ab* n'y seroit pas contenue exactement. Par exemple, si BC ne contenoit que 6 mesures $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendroit que 6 carrés $\frac{1}{2}$; et si le côté AB ne contenoit que 3 mesures $\frac{1}{3}$, il n'y auroit que 3 rectangles $\frac{1}{3}$, chacun de 6 carrés $\frac{1}{2}$; il faudroit donc multiplier 6 $\frac{1}{2}$ par 3 $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, le nombre des mesures de BC par le nombre des mesures de AB.

Si, au lieu d'évaluer la surface ABCD (fig. 90) en parties carrées, on vouloit l'évaluer en parties rectangulaires *abcd;* un raisonnement semblable fait voir qu'il faudra mesurer AB en parties telles que *ab,* et BC en parties telles que *bc,* et multiplier l'un par l'autre le nombre des parties de chaque espece.

Par exemple, si on veut savoir combien il faut de saucissons de 18 pieds de long et de 11 pouces de grosseur, pour le revêtement intérieur d'une batterie de mortier longue de 21 toises et haute de 7 pieds 4 pouces, on verra que la grosseur 11 pouces est contenue 8 fois dans la hauteur 7 pieds 4 pouces, et que la longueur 18 pieds est contenue 7 fois dans la longueur 21 toises; on multipliera donc 7 par 8, et le produit 56 exprimera le nombre cherché de saucissons.

Au reste, lorsqu'il s'agit de mesurer une surface en parties rectangles, on peut le faire aussi en mesurant d'abord en parties carrées, et divisant le nombre de ces parties par celui des mesures carrées pareilles que contient la mesure rectangulaire que l'on emploie.

145. Puisque (141) le parallélogramme rectangle ABCD (fig. 86 et 86*) est égal au parallélogramme EBCF de même base et de même hauteur, il s'ensuit donc que, pour avoir la surface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de sa base BC par le nombre des parties de sa hauteur BA; on peut donc dire, en général,

Pour avoir le nombre de mesures carrées contenues dans la surface d'un parallélogramme quelconque ABCD (fig. 82), *il faut mesurer la base* BC *et la hauteur* EF *avec une même mesure, et multiplier le nombre des mesures de la base par le nombre des mesures de la hauteur.*

On voit donc, par ce qui a été dit (144), que lorsqu'on veut évaluer la surface ABCD (fig. 90), on ne fait autre chose que répéter la surface GBCH, ou le nombre des carrés qu'elle contient, autant de fois que son côté GB est contenu dans le côté AB; ainsi le multiplicande est réellement une surface, et le multiplicateur est un nombre abstrait, qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande.

On dit cependant très communément que, *pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur;* mais on doit regarder cela comme une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le *nombre* des carrés correspondants aux parties de la base, et le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre un certain nombre de fois; de sorte que, quand on multiplie une ligne, on ne peut jamais avoir qu'une ligne; et quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. Une surface ne peut avoir d'autres éléments que des surfaces; et quoiqu'on dise souvent que le parallélogramme ABCD (fig. 82) peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales et paralleles à BC, qu'il y a de points dans la hauteur EF, on doit sous-entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas com-

de sa hauteur EF, *par la ligne* GH *menée à distances égales des deux bases opposées.*

149. 2° *Pour avoir la surface d'un polygone quelconque*, il faut le partager en triangles, par des lignes menées d'un même point à chacun de ses angles, et calculer séparément la surface de chacun de ces triangles; en réunissant tous ces produits, on aura la surface totalé du polygone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles qu'il soit possible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles. (*Voyez* fig. 92.)

150. *Si le polygone étoit régulier* (fig. 53); comme tous les côtés sont égaux, et que toutes les perpendiculaires menées du centre sont égales; en le concevant composé de triangles qui ont leur sommet au centre, on auroit la surface, en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, et multipliant ce produit par le nombre des côtés; ou, ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

151. Puisqu'on peut (136) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que *pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.*

Car la perpendiculaire menée sur un des côtés ne differe pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

152. Puisque les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons ou comme les diametres (136), il est visible que si l'on connoissoit la circonférence d'un cercle d'un diametre connu, on seroit bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connoîtroit le diametre, puisqu'il ne s'agiroit que de calculer le quatrieme terme de cette proportion : *Le diametre de la circonférence connue est à cette même circonférence, comme le diametre de la circonférence cherchée est à cette seconde circonférence.*

On ne connoît point exactement le rapport du diametre à la circonférence; mais on en a des valeurs assez appro-

chées, pour qu'un rapport plus exact puisse être regardé comme absolument inutile dans la pratique.

Archimede a trouvé qu'un cercle qui auroit 7 pieds de diametre, auroit 22 pieds de circonférence, à très peu de chose près. Ainsi, si l'on demande quelle sera la circonférence d'un cercle qui auroit 20 pieds de diametre, il faut chercher (Arith. 179) le quatrieme terme de la proportion, dont les trois premiers sont

$$7 : 22 :: 20 :$$

Ce quatrieme terme, qui est $62\frac{6}{7}$, est, à très peu de chose près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diametre. Je dis à très peu de chose près; car il faudroit que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diametre, pour que la circonférence déterminée d'après le rapport de 7 à 22 fût fautive d'un pied. Au reste, en employant le rapport de 7 à 22, on peut se dispenser de faire la proportion; il suffit de tripler le diametre, et d'ajouter au produit la septieme partie de ce même diametre, parceque $3\frac{1}{7}$ est le nombre de fois que 22 contient 7.

Adrien Métius a donné un rapport beaucoup plus approché; c'est celui de 113 à 355. Ce rapport est tel, qu'il faudroit que le diametre d'un cercle fût de 1000000 pieds au moins, pour qu'on fît, en se servant de ce rapport, une erreur d'un pied sur la circonférence (1). Enfin, si l'on veut avoir la circonférence avec encore plus de précision, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3,14159265358979 32, qui passe de beaucoup les limites des besoins ordinaires, et dont on peut supprimer plus ou moins de chiffres sur la droite, selon qu'on a moins ou plus besoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il est assez commode en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle pro-

(1) Pour retenir aisément ce rapport, il faut faire attention que les nombres qui le composent se trouvent, en partageant en deux parties égales les trois premiers nombres impairs, 1, 3, 5, écrits deux fois de suite en cette maniere, 113355.

posé, l'opération se réduit à multiplier le nombre 3,1415926 par le diametre de ce cercle.

Il est donc facile actuellement de trouver la surface d'un cercle proposé, du moins aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique.

Si l'on demande de combien de pieds carrés est la surface d'un cercle qui auroit 20 pieds de diametre : je calcule sa circonférence comme ci-dessus, et, ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds $\frac{6}{7}$, je multiplie 62 $\frac{6}{7}$ par 5, qui est la moitié du rayon (151), et j'ai 314 $\frac{2}{7}$ pieds carrés pour la surface de ce cercle.

153. On appelle *secteur de cercle* la surface comprise entre deux rayons IA, IB (fig. 74), et l'arc AVB; et on appelle *segment* la surface comprise entre l'arc AVB et sa corde AB.

Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un secteur de cercle peut donc être considéré comme une portion de polygone régulier, et sa surface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leur sommet au centre, et pour hauteur le rayon ; donc, *pour avoir la surface d'un secteur de cercle, il faut multiplier l'arc qui lui sert de base par la moitié du rayon.*

A l'égard du segment, il est évident que pour en avoir la surface il faut retrancher la surface du triangle IAB de celle du secteur IAVB.

Il est évident que, dans un même cercle, les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs nombres de degrés; que, par conséquent, quand on connoît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de degrés qu'on voudra, en faisant cette proportion : 360° *sont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence est à celle de ce même arc.*

S'il s'agit de trouver la surface d'un secteur dont on connoît le nombre de degrés et le rayon, on cherchera, par la

proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui est la base de ce secteur, et on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, si l'on demande quelle est la surface du secteur de 32° 40′ dans un cercle qui a 20 pieds de diametre, on trouvera, comme ci-dessus (151), que la circonférence est de 62 $\frac{6}{7}$ pieds; cherchant le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers sont 360° : 32° 40′ :: 62 $\frac{6}{7}$: ce quatrieme terme, qu'on trouvera de 5 $\frac{19}{27}$, sera la longueur de l'arc de 32° 40′, laquelle étant multipliée par 5, moitié du rayon, donne 28 $\frac{14}{27}$ pour la surface du secteur de 32° 40′.

Il est aisé, d'après cela, d'avoir la surface du segment, en déterminant (fig. 74) le côté AB et la hauteur IZ du triangle IAB par une opération fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons enseignée (121); mais la trigonométrie, que nous verrons par la suite, nous donnera des moyens encore plus expéditifs et plus susceptibles d'exactitude.

154. Quoique ce que nous avons dit (149) suffise pour mesurer toute espece de figure rectiligne, néanmoins il est à propos que nous exposions ici une autre méthode qui est plus simple dans la pratique. Elle consiste (fig. 93) à tirer dans la figure une ligne AG; abaisser de chacun des angles des perpendiculaires BM, LC, DK, EI, FH sur cette ligne AG; mesurer chacune de ces lignes, ainsi que les intervalles AN, NO, OP, PQ, QR, RG; alors la figure est partagée en plusieurs parties, dont les deux extrêmes tout au plus sont des triangles, et les autres sont des trapezes; les premiers se mesurent en multipliant la hauteur par la moitié de la base (147); à l'égard des trapezes, chacun se mesure en multipliant la moitié de la somme des deux côtés paralleles par la distance perpendiculaire de ces mêmes côtés (148).

Lorsque la figure est une ligne courbe, on la mesurera avec une exactitude suffisante pour la pratique, en partageant la ligne AT (fig. 94), qu'on tirera suivant sa plus grande longueur, en un assez grand nombre de parties, pour que les arcs interceptés AB, BC, CD, etc. puissent

être regardés comme des lignes droites; et pour rendre le calcul le plus simple qu'il soit possible, on fera les parties AO, OP, etc. égales entre elles; alors, pour avoir la surface, on ajoutera ensemble toutes les lignes BN, CM, DL, EK, FI, et la moitié seulement de la derniere GH, si la courbe est terminée par une droite GH perpendiculaire à AT; on multipliera le tout par l'un des intervalles AO, et le produit sera la surface cherchée; c'est une suite immédiate de ce qui a été dit (148); car, pour avoir la surface ABN, il faut multiplier AO par la moitié de BN; pour avoir celle de BCMN, il faut multiplier OP ou AO par la moitié de BN et de CM; pour avoir celle de CDLM, il faut multiplier AO par la moitié de CM et de DL, et ainsi de suite; donc, en réunissant ces produits, on voit que AO sera multiplié par deux moitiés de BN, plus deux moitiés de CM, plus deux moitiés de DL, plus deux moitiés de EK, plus deux moitiés de FI; plus enfin une moitié seulement de GH, c'est-à-dire, que AO doit être multiplié par la totalité des lignes BN, CM, DL, EK, FI, plus la moitié de la derniere.

S'il s'agissoit de l'espace BNHG terminé par les deux lignes BN, GH, on prendroit, non pas BN entiere, mais sa moitié seulement.

La regle que nous venons d'exposer pour mesurer les surfaces planes, terminées par des courbes, peut être employée fort utilement dans diverses recherches relatives aux navires. On a souvent besoin, dans ces recherches, de connoître la surface de quelques coupes horizontales du navire; nous aurons occasion d'en faire usage par la suite.

Du Toisé des Surfaces.

155. Ce qu'on entend par *toisé* des surfaces, c'est la méthode de faire les multiplications nécessaires pour évaluer les surfaces, lorsqu'on a mesuré les dimensions en toises et parties de toises.

Il y a deux manieres d'évaluer les surfaces en toises carrées et parties de la toise carrée.

Dans la premiere, on compte par toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, lignes carrées, etc.

La toise carrée contient 36 pieds carrés, parceque c'est un rectangle qui a 6 pieds de long sur 6 pieds de large. Le pied carré contient 144 pouces carrés, parceque c'est un rectangle qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large. Par une raison semblable, on voit que le pouce carré vaut 144 lignes carrées, etc.

Ainsi, pour évaluer une surface en toises carrées et parties carrées de la toise carrée, il n'y a autre chose à faire qu'à réduire les deux dimensions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite espece (en lignes, si la plus petite espece est des lignes); et après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces carrés, ensuite en pieds carrés, et enfin en toises carrées, en divisant successivement par 144, 144 et 36. Par exemple, pour trouver la surface d'un rectangle qui auroit $2^T\ 3^P\ 5^p$ de long, et $0^T\ 4^P\ 6^p$ de large, je réduis ces deux dimensions en pouces, et j'ai 185^p à multiplier par 54^p; ce qui me donne 9990 pouces carrés, et s'écrit ainsi 9990^{pp}. Pour les réduire en pieds carrés, je divise par 144; j'ai 69 pieds carrés et 54^{pp} de reste, c'est-à-dire, $69^{PP}\ 54^{pp}$; pour réduire les 69^{PP} en toises carrées, je divise par 36; j'ai une toise carrée ou 1^{TT} pour quotient, et 33^{PP} de reste; en sorte que la surface cherchée est de $1^{TT}\ 33^{PP}\ 54^{pp}$.

Dans la seconde maniere d'évaluer les surfaces en toises carrées et parties de la toise carrée, on conçoit la toise carrée composée de six rectangles qui ont tous une toise de haut et un pied de base, et que, pour cette raison, on nomme *toises-pieds* : on subdivise chaque toise-pied en 12 parties ou rectangles qui ont chacun une toise de haut et un pouce de base, et qu'on appelle *toises-pouces* : on subdivise chacune de celles-ci en 12 parties qui ont chacune une toise de haut et une ligne de base, et qu'on appelle *toises-lignes* : en un mot, on se représente la toise divisée et subdivisée continuellement en rectangles, qui ont constamment une toise de haut sur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un

point de base. Les subdivisions qui passent le point se marquent comme les minutes, secondes, tierces, quartes, etc. pour les degrés, excepté qu'on en fait précéder la marque par un T, signe de la toise; ainsi les marques successives, et les valeurs des subdivisions de la toise carrée, sont telles qu'on les voit dans la table suivante.

Table des Subdivisions de la Toise carrée en Rectangles d'une toise de haut, et caracteres qui représentent ces parties.

La toise-carrée vaut 6 toises-pieds, ou.	6^{TP}
La toise-pied vaut 12 toises-pouces, ou.	12^{Tp}
La toise-pouce.	12^{Tl}
La toise-ligne.	12^{Tpt}
La toise-point.	$12^{T'}$
La T' ou toise-prime.	$12^{T''}$
La T'' ou toise-seconde.	$12^{T'''}$
La toise-tierce.	12^{Tiv}
et ainsi de suite.	

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes pour évaluer une surface, il faut concevoir que les toises du multiplicande sont des toises carrées; les pieds, des toises-pieds; les pouces, des toises-pouces, et ainsi de suite; à l'égard du multiplicateur, il représentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande. Par exemple, si, ayant à mesurer la surface du rectangle ABCD (fig. 95), je trouve le côté AD de $4^T\ 4^P\ 6^p$, et le côté AB de $2^T\ 3^P$; je vois que si AE représente une toise, la surface ABCD est composée de deux rectangles qui ont chacun une toise de haut sur $4^T\ 4^P\ 6^p$ de long, et d'un rectangle qui a 3^P ou une demi-toise de haut sur $4^T\ 4^P\ 6^p$ de long, et qui par conséquent est la moitié de l'un des deux autres; de sorte que je vois qu'il s'agit de répéter deux fois et demi un rectangle de 1^T de haut sur $4^T\ 4^P\ 6^p$ de long, c'est-à-dire, de

répéter deux fois et demi la quantité 4^{TT} 4^{TP} 6^{Tp}. Ceci prouve ce que nous avons dit dans la note du n° 47 de l'Arithmétique, sur la nature des unités du produit et de ses facteurs dans la multiplication géométrique.

On voit en même temps qu'il n'y a ici aucune nouvelle regle à apprendre pour faire ces sortes de multiplications, qui sont évidemment les mêmes que celles que nous avons données en Arithmétique, sous le nom de *Multiplications des Nombres complexes.* Ainsi, pour nous borner à un exemple, si l'on me demande quelle est la surface d'un rectangle qui auroit 52^{T} 4^{P} 5^{P} de long, et 44^{T} 4^{P} 8^{P} de large, je fais l'opération comme il suit :

52^{T}	4^{P}	5^{P}		
44^{T}	4^{P}	8^{P}		
208^{TT}	0^{TP}	0^{Tl}	0^{Tpt}	
208				
22				
7	2			
2	2	8		
0	3	8		
26	2	2	6	
8	4	8	10	
2	5	6	11	4
2	5	6	11	4
2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}

C'est-à-dire, je multiplie 52 par 44, puis les 4^{P} du multiplicande par 44, en prenant pour 3^{P} la moitié de 44, et pour 1^{P} le tiers de ce que j'aurai eu pour 3^{P}; ensuite je multiplie 5^{P} par 44, en prenant pour 4^{P} le tiers de ce que j'ai eu pour 1^{P}; et pour 1^{P} je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4^{P}.

Pour multiplier ensuite par les 4^{P} qui se trouvent dans le multiplicateur, je prends pour 3^{P} la moitié du multiplicande total, et pour 1^{P} le tiers de ce que j'ai eu pour 3^{P}. Enfin, pour multiplier par 8^{P}, je prends le tiers de ce que j'ai eu

pour 1^{P}, et je l'écris deux fois; réunissant tous ces produits particuliers, j'ai 2361^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpt} pour produit total. Ainsi on voit que nous avons été fondés à dire, dans l'Arithmétique, que les regles que nous donnions pour les nombres complexes renfermoient le toisé, et qu'il n'y avoit autre chose à exposer que la nature des unités du produit et des facteurs.

Quand on a ainsi évalué une surface en toises carrées, toises-pieds, toises-pouces, etc., il est fort aisé d'en trouver la valeur en toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, etc. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 $\frac{1}{2}$ sous les parties de la toise, à commencer des toises-pieds, comme on le voit ci-dessous; multiplier chaque partie par le nombre inférieur qui lui répond, et porter les produits des deux nombres consécutifs 6 $\frac{1}{2}$ dans une même colonne; lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$, il restera 1, écrivez 72 sous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une seconde colonne. Ainsi, pour réduire en toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, etc., les parties du produit que nous avons trouvé ci-dessus, j'écris :

2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
2361^{TT}	12^{PP}	72^{pp}		
	2	12		
		4		
2361^{TT}	14^{PP}	88^{pp}		

Et je multiplie les toises-pieds par 6, parceque la toise-pied vaut 6 pieds carrés, ayant 6 pieds de haut sur un pied de base. Je multiplie les toises-pouces par $\frac{1}{2}$, et je porte les deux entiers, que me donne cette multiplication, au rang des pieds carrés, parceque la toise-pouce étant la 12e partie de la toise-pied, doit valoir la 12e partie de 6 pieds carrés, c'est-à-dire, un demi-pied carré; donc les 5 toises-pouces

valent 2 pieds carrés et demi; et comme le demi-pied carré vaut 72 pouces carrés, au lieu du demi, j'écris 72; ensuite, pour réduire les toises-lignes, je les multiplie par 6, parceque la toise-ligne étant la 12ᵉ partie de la toise-pouce, doit valoir la 12ᵉ partie de 72 pouces carrés, c'est-à-dire, 6 pouces carrés. Un raisonnement semblable prouve qu'on doit multiplier ensuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, etc., ainsi que nous venons de le dire.

Donc, réciproquement, si l'on veut réduire en toises-pieds, toises-pouces, etc., des parties-carrées de la toise-carrée, l'opération se réduira : 1° A prendre le sixieme du nombre des pieds carrés; ce qui donnera des toises-pieds. 2° On doublera le reste, s'il y en a un, et on y ajoutera une unité, si le nombre des pouces carrés est ou excede 72; et l'on aura les toises-pouces. 3° Ayant retranché 72 du nombre des pouces carrés, lorsque ce nombre sera ou excédera 72, on multipliera le reste par 6, et l'on aura les toises-lignes. 4° On doublera le reste, et on y ajoutera une unité, si le nombre des lignes carrées excede 72, et on aura le nombre des toises-points. On voit par là comment on doit continuer pour avoir les parties suivantes, lorsqu'il doit y en avoir. Ainsi, si l'on proposoit de réduire 52^{TT} 25^{PP} 87^{pp} 92^{ll} en toises-pieds, toises-pouces, etc., je diviserois 25 par 6, et j'aurois 4^{TP}, et 1 de reste; je double cet 1, et j'y ajoute 1, parceque le nombre des pouces carrés excede 72; j'ai donc 3^{Tp}. Je retranche 72 de 87, et je divise le reste 15 par 6; j'ai 2^{Tl}, et 3 de reste. Je double ce reste, et j'y ajoute une unité, parceque le nombre des lignes carrées excede 72; j'ai 7^{Tpts}. Je retranche 72 de 92, et je divise le reste 20 par 6; j'ai $3^{T'}$, et 2 de reste; je double ce reste, et j'ai $4^{T''}$; en sorte que j'ai en total 52^{TT} 4^{TP} 3^{Tp} 2^{Tl} 7^{Tpts} $3^{T'}$ $4^{T''}$.

156. Puisque, pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier le nombre des parties de la base par le nombre des parties de la hauteur, il s'ensuit (Arith. 74) que, si connoissant la surface et le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il

faudra diviser le nombre qui exprime la surface, par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface que l'on divise alors par une ligne. La division d'une surface par une ligne n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne par une ligne. Ce que l'on fait véritablement, alors, on divise une surface par une surface.

En effet, selon ce que nous avons dit (155), lorsqu'on évalue la surface du rectangle ABCD (fig. 95), on répete la surface du rectangle ED de même base, et qui a pour hauteur l'unité ou la mesure principale AE; on répete, dis-je, cette surface autant de fois que sa hauteur AE est comprise dans la hauteur AB : ainsi, quand on veut connoître le nombre de parties de AB, ou le nombre des unités AE qu'il contient, il faut chercher combien de fois la surface ABCD contient celle du rectangle ED. Donc, si la surface ABCD étant exprimée par $361^{TT}\ 2^{TP}\ 5^{Tp}\ 2^{Tl}\ 8^{Tpts}$, la base AD est de $4^{T}\ 3^{P}\ 6^{p}$; pour avoir la hauteur AB, il faut concevoir que l'on a $361^{TT}\ 2^{TP}$, etc. à diviser, non par $4^{T}\ 3^{P}\ 6^{p}$, mais par $4^{TT}\ 3^{TP}\ 6^{Tp}$; et comme la toise est alors facteur commun du dividende et du diviseur, il est évident que le quotient sera le même que si l'un et l'autre exprimoient des toises et parties de toises linéaires; donc l'opération se réduit à diviser $361^{T}\ 2^{P}$, etc. par $4^{T}\ 3^{P}$; c'est-à-dire, que l'on considérera le dividende et le diviseur comme exprimant des toises linéaires, et par conséquent comme étant de même espece; et comme l'état de la question fait voir que le quotient doit aussi être de cette même espece, c'est-à-dire, exprimer des toises et parties de toises linéaires, il s'ensuit que la division doit se faire alors précisément selon la regle donnée (Arith. 126 et 128).

Si la surface étoit donnée en toises-carrées et parties-carrées de la toise-carrée, alors, pour plus de simplicité, on réduiroit ces parties en toises-pieds, toises-pouces, etc., par ce qui vient d'être dit (155); après quoi, on opéreroit comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la hau-

teur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui auroit $2^T\ 5^P$ de base, et $129^{TT}\ 29^{PP}\ 54^{PP}$ de surface, on réduira (155) cette surface à $120^{TT}\ 4^{TP}\ 10^{Tp}\ 9^{Tl}$; et la question, d'après ce qui précede, sera réduite à diviser $120^T\ 4^P\ 10^p\ 9^l$ par $2^T\ 5^P$; ce qui, en suivant la regle donnée (Arith. 126 et 128), donne $42^T\ 5^P\ 10^p\ 1^l\ \frac{13}{17}$.

De la Comparaison des Surfaces.

157. *Les surfaces des parallélogrammes sont entre elles, en général, comme les produits des bases par les hauteurs.*

C'est-à-dire, que la surface d'un parallélogramme contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la base du premier par sa hauteur contient le produit de la base du second par sa hauteur.

Cela est évident, puisque tout parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur.

De là il est aisé de conclure que lorsque deux parallélogrammes ont même hauteur, ils sont entre eux comme leurs bases; et que lorsqu'ils ont même base, ils sont entre eux comme leurs hauteurs; car le rapport des produits ne changera point, si l'on omet dans chacun le facteur qui leur est commun (Arith. 170).

Selon ce qui a été dit (151), la surface du cercle est égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, et pour base la circonférence, et par conséquent égale à un rectangle qui auroit pour hauteur le rayon, et pour base la demi-circonférence; donc, si l'on compare ce rectangle au carré du rayon qui est un rectangle de même hauteur, on verra évidemment (157) que *le carré du rayon est à la surface du cercle, comme le rayon est à la demi-circonférence.* Ainsi, pour avoir la surface d'un cercle, il suffit de multiplier le carré de son rayon par le rapport de la demi-circonférence au rayon, ou de la circonférence au diametre.

Ainsi, dans l'exemple donné (147), je multiplie 100 carré du rayon 10 par $\frac{22}{7}$, ce qui donne $\frac{2200}{7}$, ou $314\frac{2}{7}$ pieds carrés pour la surface du cercle qui a 20 pieds de diametre.

158. Puisque les triangles sont (140) moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases; et les triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.*

Car les surfaces des deux parallélogrammes ABCD et *abcd* (fig. 96 et 97) sont entre elles (157) comme les produits des bases par leurs hauteurs, c'est-à-dire, que ABCD : *abcd* :: BC × AE : *bc* × *ae*. Mais si les parallélogrammes ABCD, *abcd* sont semblables, et si AB et *ab* sont deux côtés homologues, les triangles AEB, *aeb* seront semblables, parcequ'outre l'angle droit en E et en *e*, ils doivent avoir de plus l'angle B égal à l'angle *b*; on aura donc (108) AE : *ae* :: AB : *ab*, ou :: BC : *bc*, à cause des parallélogrammes semblables; on peut donc (99), dans les produits BC × AE et *bc* × *ae*, substituer le rapport de BC : *bc* à celui de AE : *ae*; et alors le rapport de ces produits sera celui de $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; donc ABCD : *abcd* :: $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; et comme on peut prendre indifféremment pour base tel côté qu'on voudra, on voit donc qu'en général les surfaces des parallélogrammes semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.

160. A l'égard des triangles semblables, il est évident qu'ils ont la même propriété, puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur.

161. En général, *les surfaces de deux figures semblables quelconques sont entre elles comme les carrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.*

Car les surfaces de deux figures semblables peuvent toujours être regardées comme composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun; alors la surface de chaque triangle de la première figure sera à celle du triangle

correspondant dans la seconde, comme le carré d'un côté du premier est au carré du côté homologue du second (160); donc, puisque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs carrés doivent être aussi tous en même rapport (Arith. 191), chaque triangle du premier polygone sera au triangle correspondant du second, comme le carré d'un côté quelconque du premier polygone est au carré du côté homologue du second; donc (Arith. 186) la somme de tous les triangles du premier sera à la somme de tous les triangles du second, ou la surface du premier à la surface du second, aussi dans ce même rapport.

162. *Les surfaces des cercles sont donc entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Car les cercles sont des figures semblables (136), dont les rayons et les diametres sont des lignes homologues.

On doit dire la même chose des secteurs, et des segments de même nombre de degrés.

On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables comme de leurs contours; les contours suivent le rapport simple des côtés (134), c'est-à-dire, que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, etc. d'un côté homologue de l'autre, le contour de la premiere sera aussi double, ou triple, ou quadruple du contour de la seconde; mais il n'en est pas ainsi des surfaces; celle de la premiere figure seroit alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, etc. aussi grande que celle de la seconde.

On peut rendre cette vérité sensible par les figures 98 et 99, où l'on voit (fig. 98) que le parallélogramme ABCD, dont le côté AB est double du côté AG du parallélogramme semblable AGIE, contient quatre parallélogrammes parfaitement égaux à celui-ci; et dans la figure 99, le triangle ADF, dont le côté AD est double du côté AB du triangle semblable ABC, contient quatre triangles égaux à celui-ci; pareillement, le triangle AGK, dont le côté AG est triple de AB, contient neuf triangles égaux à ABC. Il en seroit de même des cercles; un cercle qui auroit un rayon double,

ou triple, ou quadruple, etc. de celui d'un autre cercle, auroit 4 fois, ou 9 fois, ou 16 fois, etc. autant de surface que celui-ci.

On voit par là que deux navires qui seroient parfaitement semblables auroient des voilures dont les surfaces seroient entre elles comme les carrés des hauteurs des mâts, c'est-à-dire, comme nous le verrons par la suite, comme les carrés des longueurs des navires, ou de leurs largeurs; et par conséquent on peut dire que deux navires semblables, et qui présentent leurs voiles au vent de la même maniere, reçoivent des quantités de vent qui sont comme les carrés des longueurs de ces navires. Il n'en faut pas conclure pour cela que leurs vîtesses seront dans ce rapport. Nous verrons en mécanique ce qui doit en être.

Au reste, nous n'examinons pas ici si les navires semblables doivent avoir des voilures semblables; c'est un examen qui appartient aussi à la mécanique.

163. Si l'on vouloit donc construire une figure semblable à une autre, et dont la surface fût à celle de celle-ci dans un rapport donné, par exemple, dans le rapport de 3 à 2, il ne faudroit pas faire les côtés homologues dans le rapport de 3 à 2; car alors les surfaces seroient comme 9 à 4; mais il faudroit faire ces côtés de telle grandeur, que leurs carrés fussent entre eux :: 3 : 2; c'est-à-dire, en supposant que le côté AB de la figure X (fig. 100) soit de 50^p, par exemple, il faudroit, pour trouver le côté homologue ab de la figure cherchée x (fig. 101), calculer le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient 3 : 2 :: $\overline{50}^2$ ou 50×50 est à un quatrieme terme; ce quatrieme terme, qui est $1666\frac{2}{3}$, seroit le carré du côté ab; c'est pourquoi, tirant la racine carrée (Arith. 145) de $1666\frac{2}{3}$, on trouveroit $40^p,824$, c'est-à-dire, $40^p\ 9^p\ 10^l$ à-peu-près pour le côté ab. Quand on a un côté de la figure x, il est aisé de construire cette figure, selon ce qui a été dit (133).

164. *Si sur les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle*

rectangle ABC (fig. 102), *on construit trois carrés* BEFA, BGHC, AILC, *celui qui occupera l'hypothénuse vaut toujours la somme des deux autres.*

La même méthode peut être employée à *déterminer le rayon d'un cercle qui auroit une surface proposée.*

On prendra arbitrairement un nombre que l'on considérera comme le rayon d'un cercle, dont on calculera la surface par ce qui a été dit (151). Puis on fera cette proportion : *La surface calculée est à la surface donnée, comme le carré du rayon connu de la premiere est au carré du rayon inconnu de la seconde.*

On peut aussi trouver ce rayon par la proposition donnée (157).

Abaissons de l'angle droit B, sur l'hypothénuse AC, la perpendiculaire BD; les deux triangles BDA, BDC seront chacun semblables au triangle ABC (112); et, par conséquent, les surfaces de ces trois triangles seront entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues; on a donc cette suite de rapports égaux, $ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2 :: ABC : \overline{AC}^2$, ou $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC$; donc (Arith. 186) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC$. Or, il est évident que ABC vaut les deux parties $ABD + BDC$; donc AILC vaut $ABEF + BGHC$; ce qu'on peut encore exprimer en cette maniere, $\overline{AC}^2$ vaut $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Puisque le carré de l'hypothénuse vaut la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que le *carré d'un des côtés de l'angle droit vaut le carré de l'hypothénuse, moins le carré de l'autre côté ; c'est-à-dire, que* $\overline{BC}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, *et* $\overline{AB}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc, *lorsqu'on connoît deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troisieme.*

Supposons, par exemple, que le côté AB soit de 12 pieds, le côté BC de 25 : on demande l'hypothénuse AC. J'ajoute 144, qui est le carré du côté AB, avec 625, qui est le carré du côté BC : la somme 769 est égale au carré de l'hypothé-

nuse AC (164); donc, si je tire la racine carrée de 769, j'aurai l'hypothénuse AC; cette racine est 27,73, à moins d'un centieme près; donc le côté AC est de 27,73 pieds, c'est-à-dire, de $27^p\ 8^p\ 9^l$.

Si au contraire on donnoit l'hypothénuse et un des côtés, on trouveroit le second côté par ce qui vient d'être dit (165). Par exemple, si l'hypothénuse AC étoit de 54 pieds, et le côté BC de 42, et qu'on demandât de combien est le côté AB, alors de 2916, qui est le carré de l'hypothénuse 54, je retrancherois 1764, qui est le carré du côté BC; le reste 1152 seroit donc la valeur du carré du côté AB; tirant la racine carrée de 1152, cette racine, qui est 33,94, seroit la valeur de AB, c'est-à-dire, que AB seroit de $33^p,94$ ou $33^p\ 11^p\ 3^l$ à-peu-près.

Cette proposition est d'une très grande utilité; nous aurons plus d'une occasion de nous en convaincre par la suite.

Supposons, par exemple, qu'on demande la longueur du talus intérieur d'un rempart qui auroit 18 pieds de base et 12 pieds de hauteur.

J'ajoute le carré de 18.	324
Avec le carré de 12.	144
La somme.	468

est le carré de la longueur du talus, dont la racine 21,6 sera la longueur demandée.

Supposons, pour second exemple, que A (fig. 195) soit un fourneau de mine, auquel on communique par la galérie DB, et le rameau BA de 9 pieds. L'effet de la poudre étant supposé pouvoir s'étendre en tout sens à une distance de 25 pieds, il faut trouver quelle partie BC de la galerie on doit bourrer, pour que la galerie résiste autant que le reste du terrein.

Il est clair qu'on doit bourrer jusqu'à une distance BC telle que AC soit de 25 pieds; BC est un côté de l'angle droit du triangle rectangle ABC; on l'aura donc comme il suit:

Du carré de 25.	625
Je retranche celui de 9.	81
Le reste.	544

est le carré de BC, et sa racine 23,3 est la longueur que doit avoir BC.

On peut faire usage de la propriété du carré de l'hypothénuse, pour élever facilement une perpendiculaire sur une ligne droite en un point donné.

Par exemple, sur le prolongement EA de la face d'un bastion (fig. 196), on veut établir perpendiculairement une batterie au point A. On formera avec un cordeau un triangle rectangle ABC, en prenant AB de 3 toises par exemple, et faisant AC de 4 toises, et BC de 5 toises, ce qui est facile. Alors AC sera perpendiculaire sur BA; car le carré de 5 vaut le carré de 4, plus le carré de 3.

167. Puisque le carré de l'hypothénuse vaut la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, il s'ensuit que si le triangle réctangle est isocele, comme il arrive, par exemple, dans un carré lorsqu'on tire la diagonale AC (fig. 103), alors le carré de l'hypothénuse sera double du carré d'un de ses côtés; donc la surface d'un carré est à celle du carré fait sur sa diagonale, comme 1 est à 2; donc (Arith. 192) le côté d'un carré est à sa diagonale, comme 1 est à la racine carrée de 2; et comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'ensuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un carré à sa diagonale, c'est-à-dire, que la diagonale est *incommensurable*, ou n'a aucune commune mesure avec son côté.

La propriété des trois côtés d'un triangle rectangle, enseignée (164), n'est pas particuliere aux carrés formés sur ces côtés; en général, *si sur les trois côtés d'un triangle rectangle quelconque on forme trois figures semblables quelconques, par exemple, trois triangles, trois cercles, etc., la figure formée sur l'hypothénuse vaudra la somme des figures semblables formées sur les deux autres côtés.*

Cela se démontre absolument de même que pour les carrés, en partant de ce principe (161), que les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.

Donc aussi la surface d'une figure quelconque, formée sur un des côtés de l'angle droit, est égale à la différence des deux figures semblables, formées sur l'hypothénuse et sur l'autre côté de l'angle droit.

168. Dans la démonstration du n° 164, on a vu que la similitude des triangles ABC, ADB, CDB, donne

ABC : $\overline{AC}^2$ :: ADB : $\overline{AB}^2$ :: BDC : $\overline{BC}^2$, ou bien ABC : ADB : BDC :: $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$; mais les triangles ABC, ADB, BDC étant tous trois de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases (158); donc ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC; donc aussi $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$ :: AC : AD : DC; donc *le carré fait sur l'hypothénuse est à chacun des carrés faits sur les deux autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun des segments correspondants à ces côtés.*

169. De là on peut conclure le moyen de faire par lignes ce que nous avons enseigné à faire par nombres (163), c'est-à-dire, de construire une figure x semblable à une figure proposée X (fig. 100 et 101), et dont la surface soit à celle de celle-ci dans un rapport donné.

On tirera (fig. 104) une ligne indéfinie DE, sur laquelle on prendra les deux parties DP et PE, telles que DP soit à PE comme la surface de la figure donnée X (fig. 100) doit être à celle de la figure cherchée x (fig. 101), c'est-à-dire, :: 3 : 2, si l'on veut que x soit les deux tiers de X. Sur DE (fig. 104), comme diametre, on décrira le demi-cercle DBE; et ayant élevé au point P la perpendiculaire PB, on menera du point B, où elle rencontre la circonférence, aux deux extrémités D et E, les cordes DB, BE. Sur DB on prendra BA égal à un côté AB de la figure X, et, ayant mené AC parallele à DE, on aura BC pour le côté homologue de la figure cherchée x, qu'on construira ensuite comme il a été dit (133). En voici la raison : La surface de la figure X doit être à celle de la figure x, comme le carré du côté AB est au carré du côté cherché ab, c'est-à-dire, :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$; or, on veut que ces deux surfaces soient aussi l'une à l'autre :: 3 : 2; il faut donc que $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$ :: 3 : 2. Or (fig. 104), AB : BC :: BD : BE, et par conséquent (Arith. 191) $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$ :: $\overline{BD}^2$: $\overline{BE}^2$; mais comme le triangle DBE est rectangle, on a (168) $\overline{BD}^2$: $\overline{BE}^2$ :: DP : PE, c'est-à-dire, :: 3 : 2; donc $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$

:: 3 : 2; donc aussi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc ab doit être égal à BC.

170. Il suit encore de ce qu'on vient de dire (168), que *les carrés des cordes* AC, AD, *etc. menées par l'extrémité d'un diametre* AB (fig. 105), *sont entre eux comme les parties* AP, AO *que coupent, sur ce diametre, les perpendiculaires abaissées des extrémités de ces cordes.*

Car, en tirant les cordes BC et BD, on aura (168) dans le triangle rectangle ACB,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP;$$

et dans le triangle rectangle ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AO : AB;$$

donc (100) $$\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP.$$

Des Plans.

171. Après avoir établi la mesure et les rapports des surfaces planes, il ne nous reste plus, pour pouvoir passer aux solides, qu'à considérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes positions à l'égard des plans, et celles des plans dans leurs différentes positions les uns à l'égard des autres; c'est ce dont nous allons nous occuper actuellement.

Nous ne supposons aux plans dont il va être question aucune grandeur, ni aucune figure déterminée; nous les supposons étendus indéfiniment dans tous les sens; ce n'est que pour aider l'imagination que nous leur donnons les figures par lesquelles nous les représentons ici.

172. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard.*

Car le plan (5) est une surface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

173. *Il en est de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.*

Car une ligne droite qu'on tireroit dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'un et dans l'autre, se trouveroit en partie dans l'un de ces plans, et en partie élevée ou abaissée à son égard ; ce qui ne peut être (172).

174. *Deux lignes* AB, CD (fig. 106), *qui se coupent, sont dans un même plan.*

Car il est évident qu'on peut faire passer un plan par l'une AB de ces lignes, et par un point pris arbitrairement dans la seconde; et comme le point d'intersection E, en tant qu'appartenant à AB, est dans ce même plan, la ligne CD a donc deux points dans ce plan : elle y est donc tout entière.

175. *La rencontre ou l'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.*

Il est évident qu'elle doit être une ligne, puisqu'aucun des deux plans n'a d'épaisseur : de plus, elle doit être une ligne droite; car une ligne droite qu'on tireroit par deux points de cette intersection, est nécessairement tout entiere dans chacun des deux plans : elle est donc l'intersection même.

176. *On peut donc faire passer par une même ligne droite une infinité de plans différents.*

177. Nous disons qu'*une ligne est perpendiculaire à un plan*, quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

178. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE (fig. 107) *est donc perpendiculaire à toutes les lignes* BC, BC, BC, *etc. qu'on peut mener par son pied dans ce plan ;* car, s'il y en avoit une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle inclineroit vers cette ligne, et par conséquent vers le plan.

179. *La ligne* AB (fig. 108) *étant perpendiculaire au plan* GE, *si par son pied* B *on tire une ligne* BC *dans le plan* GE, *et qu'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB, *je dis que, dans ce mouvement, la ligne* BC *ne sortira point du plan* GE.

Imaginons le plan ABC arrivé dans une position quelconque ABD; si la ligne BC, qui alors est en BD, n'étoit

point dans le plan GE, le plan ABD rencontreroit donc le plan GE dans une ligne droite BF, à laquelle AB seroit perpendiculaire (178); BF seroit donc aussi perpendiculaire sur AB; et comme BD est supposée perpendiculaire sur AB au même point B, il s'ensuivroit donc qu'au même point B, et dans un même plan ABD, on pourroit élever deux perpendiculaires à AB, ce qui (27) est impossible; donc BF ne peut être différente de BD; donc BC ne peut, dans son mouvement autour de AB, sortir du plan GE.

180. Donc, *pour qu'une ligne droite* AB (fig. 108) *soit perpendiculaire à un plan* GE, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux lignes* BC, BD, *qui se rencontrent à son pied dans ce plan.*

Car, si l'on conçoit que le plan de l'angle droit ABC tourne autour de AB, la ligne BC tracera (179) un plan auquel AB sera perpendiculaire; or, je dis que ce plan ne peut être autre que le plan GE des deux lignes BC et BD; car l'angle ABD étant droit, ainsi que l'angle ABC, la ligne BC, en tournant autour de AB, aura nécessairement la ligne BD pour une de ses positions; donc BD est dans le plan tracé par BC; donc AB est perpendiculaire au plan CBD.

181. *Si du point* A *d'une droite* AI *oblique à un plan* GE (fig. 109), *on abaisse une perpendiculaire* AB *sur ce plan, et qu'ayant joint les points* B *et* I *de la perpendiculaire et de l'oblique par une droite* BI, *on mene à cette derniere une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE, *je dis que* AI *sera aussi perpendiculaire à* CD.

Prenons, à commencer du point I, les parties égales IC, ID, et tirons les lignes BC et BD : ces deux dernieres lignes sont égales entre elles (29); donc les deux triangles ABC, ABD seront égaux; car, outre l'angle ABC égal à l'angle ABD, comme étant chacun droit, le côté AB est commun, et BC est égal à BD, selon ce qu'on vient de prouver; ils ont donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc AD est égal à AC; la ligne AI a donc deux points A et I également éloignés

du point C et du point D; elle est donc perpendiculaire sur CD (32).

182. *Un plan est dit perpendiculaire à un autre plan*, quand il ne penche ni d'un côté ni de l'autre de ce dernier.

183. Donc, *par une même ligne* CD (fig. 110) *prise dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

184. *Un plan* CK *est perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il passe par une droite* AB *perpendiculaire à celui-ci*; car il est évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan GE.

185. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire au plan* GE, *on mene une perpendiculaire* AB *à la commune section* CD, *cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car, si elle ne l'étoit pas, on pourroit, par le point B, où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan GE, et conduire, par cette perpendiculaire et par la commune section CD, un plan qui (184) seroit perpendiculaire au plan GE; on pourroit donc, par une même ligne CD prise dans le plan GE, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci, ce qui est impossible (183); donc AB est perpendiculaire au plan GE.

186. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE, *la perpendiculaire* BA, *qu'on élevera sur le plan* GE *par un point* B *de la section commune, sera nécessairement dans le plan* CK.

De cette proposition, il suit que *deux perpendiculaires* BA, LM *à un même plan* GE, *sont paralleles.*

Car, si l'on joint leurs pieds B et L par une ligne BL, et que par cette ligne et par AB on conduise un plan CK, ce plan sera perpendiculaire au plan GE (184); et puisque LM est alors une perpendiculaire au plan GE, menée par un point L du plan CK, elle sera donc dans le plan CK (186); or, puisque les deux lignes AB, LM sont toutes deux dans

un même plan, et perpendiculaires à la même ligne BL, elles sont paralleles (36 et 37).

187. Donc, *si deux droites* AB, CD (fig. 112) *sont paralleles chacune à une troisieme* HF, *elles seront aussi paralleles entre elles;* car les lignes AB, HF étant paralleles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan GE; par la même raison, CD et EF peuvent être perpendiculaires au même plan GE; donc AB et CD étant perpendiculaires à un même plan, seront paralleles.

188. *Si deux plans* CK, NL (fig. 111) *sont perpendiculaires à un troisieme* GE, *leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car la perpendiculaire qu'on éleveroit par le point B sur le plan GE, doit être dans chacun de ces deux plans (186); elle ne peut donc être autre que l'intersection commune.

189. On appelle *angle-plan* l'ouverture de deux plans GF, GE (fig. 113) qui se rencontrent : cet angle s'appelle aussi l'*inclinaison* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre.

L'angle-plan formé par les deux plans GF, GE, n'est autre chose que la quantité dont le plan GF auroit dû tourner autour de AG pour venir dans sa situation actuelle, s'il avoit été d'abord couché sur le plan GE.

190. De là il est aisé de voir que si par un point B pris dans la commune section AG, on mene dans le plan GE la perpendiculaire BD à AG, et dans le plan GF la perpendiculaire BC à la même ligne AG, l'angle formé par les deux plans est la même chose que l'angle formé par les deux lignes BD et BC; car il est facile de voir que, pendant le mouvement du plan GF, la ligne BC s'écarte de la ligne BD sur laquelle elle étoit couchée au commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de BD, précisément selon la même loi, selon laquelle le plan GF s'écarte du plan GE.

191. Donc *un angle-plan a même mesure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune section, et d'un même point de cette ligne.*

De là il est si aisé de conclure les propositions suivantes, que nous nous contenterons de les énoncer.

192. *Un plan qui tombe sur un autre plan forme deux angles, qui, pris ensemble, valent* 180°.

193. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui passent tous par une même droite, valent* 360°.

194. *Deux plans qui se coupent font les angles opposés au sommet égaux.*

195. On appelle *plans paralleles* ceux qui ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongés.

196. *Les plans paralleles sont donc par-tout également éloignés.*

197. *Si deux plans paralleles sont coupés par un troisieme plan* (fig. 114), *les intersections* AB, CD *seront deux droites paralleles;* car, comme elles sont dans un même plan ABCD, elles ne pourroient manquer de se rencontrer, si elles n'étoient pas paralleles, et alors il est évident que les plans se rencontreroient aussi.

198. *Deux plans paralleles, coupés par un troisieme, ont les mêmes propriétés dans les angles qu'ils forment avec ce troisieme, que deux lignes droites paralleles, à l'égard d'une troisieme droite qui les coupe.* C'est une suite de ce qui a été dit (191).

Propriétés des Lignes droites coupées par des Plans paralleles.

199. *Si d'un point* I *pris hors d'un plan* GE (fig. 115), *on tire à différents points* K, L, M *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *et qu'on coupe ces droites par un plan* ge *parallele au plan* GE, *je dis*, 1° *que ces droites seront coupées proportionnellement;* 2° *que la figure* klm *sera semblable à la figure* KLM.

Ne supposons d'abord que trois points K, L, M. Puisque les droites *kl*, *lm*, *mk* sont les intersections des plans IKL,

ILM, IKM avec le plan *ge*, elles sont paralleles aux droites KL, LM, MK, intersections des mêmes plans avec le plan GE (197); donc les triangles IKL, ILM, IMK sont semblables aux triangles I*kl*, I*lm*, I*mk* chacun à chacun; donc IK : I*k* : : KL : *kl* : : IL : I*l* : : LM : *lm* : : IM : I*m* : : MK : *mk* : or, 1° si de cette suite de rapports égaux on tire seulement ceux qui renferment les droites qui partent du point I, on aura IK : I*k* : : IL : I*l* : : IM : I*m*; donc les droites IK, IL, IM sont coupées proportionnellement.

2° Si de la même premiere suite de rapports égaux on tire ceux qui renferment les lignes comprises dans les deux plans paralleles, on aura KL : *kl* : : LM : *lm* : : KM : *km*; donc les deux triangles KLM, *klm* sont semblables, puisqu'ils ont les côtés proportionnels.

Supposons maintenant tel nombre de points A, B, C, D, F, etc. qu'on voudra, on démontrera précisément de la même maniere, que les droites IA, IB, IC, etc. sont coupées proportionnellement; et si l'on imagine des diagonales AC, AD, etc., *ac*, *ad*, etc., menées des deux angles correspondants A et *a*, on démontrera aussi de la même maniere, que les triangles ABC, ACD, etc. sont semblables aux triangles *abc*, *acd*, etc. chacun à chacun; donc les deux polygones ABCDF, *abcdf*, étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables (133).

200. Puisque les deux figures KLM, *klm* sont semblables, concluons-en que l'angle KLM est égal à l'angle *klm*; et par conséquent, *si deux droites* KL, LM, *qui comprennent un angle* KLM, *sont paralleles à deux droites* kl, lm, *qui comprennent un angle* klm, *l'angle* KLM *sera égal à l'angle* klm, *lors même que ces deux angles ne seront pas dans un même plan :* nous avons donné cette même proposition (43); mais nous supposions que les deux angles étoient dans un même plan.

201. Il suit encore de ce que les deux figures ABCDF et *abcdf* sont semblables, et de ce que les deux figures

KLM, *klm* sont semblables; il suit, dis-je, que *les surfaces des deux sections* abcdf, klm *sont entre elles comme celles des deux figures* ABCDF, KLM.

Car ABCDF : *abcdf* :: $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (161).

Mais les triangles semblables IAB, I*ab* donnent AB : *ab* :: IA : I*a*.

Et par conséquent (Arith. 191), $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$, ou (199) :: $\overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, ou (à cause des triangles semblables IML, I*ml*) :: $\overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$, et par conséquent (161) :: KLM : *klm*; donc ABCDF : *abcdf* :: KLM : *klm*, ou (Arith. 182) ABCDF : KLM :: *abcdf* : *klm*.

202. Cette démonstration fait voir en même temps que les surfaces ABCDF, *abcdf* sont entre elles comme les carrés des deux droites IA et I*a* tirées du point I à deux points correspondants de ces deux figures, et par conséquent (199) comme les carrés des hauteurs ou perpendiculaires IP, I*p* menées du point I sur les plans GE et *ge*.

Concluons donc, 1° que si les deux surfaces ABCDF, KLM étoient égales, les deux surfaces *abcdf*, *klm* seroient aussi égales;

2° Que tout ce que nous venons de dire auroit encore lieu, si le point I, au lieu d'être commun aux droites IA, IB, IC, etc., et aux droites IM, IL, etc., étoit différent pour chaque figure, pourvu qu'il fût à même hauteur au-dessus du plan *ge*.

SECTION III.

Des Solides.

203. Nous avons nommé *solide*, ou *volume*, ou *corps* (1), tout ce qui a les trois dimensions, *longueur*, *largeur*, et *profondeur*.

Nous allons nous occuper de la mesure et des rapports des solides.

Nous considérerons les solides terminés par des surfaces planes; et de ceux qui sont renfermés par des surfaces courbes, nous ne considérerons que le *cylindre*, le *cône* et la *sphere*.

Les solides terminés par des surfaces planes se distinguent en général par le nombre et la figure des plans qui les renferment; ces plans doivent être au moins au nombre de quatre.

204. Un solide, dont deux faces opposées sont deux plans égaux et paralleles, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes, s'appelle en général un *prisme*. (*Voyez* figures 116, 117, 118, 119.)

On peut donc regarder le prisme comme engendré par le mouvement d'un plan BDF qui glisseroit parallèlement à lui-même le long d'une ligne droite AB (fig. 116).

Les deux plans paralleles se nomment les *bases* du prisme, et la perpendiculaire LM, menée d'un point de l'une des bases sur l'autre base, se nomme la *hauteur*.

De l'idée que nous venons de donner du prisme, il suit qu'à quelque endroit qu'on coupe un prisme par un plan parallele à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base.

Les lignes telles que BA, qui sont les rencontres de deux parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arêtes* du prisme.

Le prisme est *droit*, lorsque ses arêtes sont perpendiculaires à la base; alors elles sont toutes égales à la hauteur. (*Voyez* figures 117 et 119.)

Au contraire, le prisme est *oblique*, lorsque ses arêtes inclinent sur la base.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base; si la base est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire* (fig. 116); si la base est un quadrilatere, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (fig. 117), et ainsi de suite.

Le *secteur sphérique* est le solide qu'engendreroit le secteur circulaire BCA tournant autour du rayon AC. La surface que décriroit l'arc AB dans ce mouvement, s'appelle *calotte sphérique.*

Le *segment sphérique* est le solide qu'engendreroit le demi-segment circulaire AFB tournant autour de la partie AF du rayon.

Des Solides semblables.

209. Les *solides semblables* sont ceux qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées dans les deux solides.

210. *Les arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues sont donc des lignes et des points semblablement placés dans les deux solides;* car les arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues sont des lignes et des points semblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puisque ces faces sont supposées semblables : or, ces faces sont semblablement disposées dans les deux solides; donc, etc.

211. Donc *les triangles qui joignent un angle solide et les extrémités d'une arête homologue dans chaque solide, sont des figures semblables, et semblablement disposées dans les deux solides;* car les extrémités des arêtes homologues sont elles-mêmes les sommets d'angles solides homologues, qui sont (210) semblablement placés à l'égard des solides.

212. *Les diagonales qui joignent deux angles solides homologues, sont donc entre elles comme les arêtes homologues de ces solides;* car elles sont les côtés des triangles semblables dont on vient de parler, et qui ont pour un de leurs côtés des arêtes homologues.

Donc deux solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, par des plans conduits par deux angles homologues,

et par deux arêtes homologues. Car les faces de ces pyramides seront composées de triangles semblables, et semblablement disposés dans les deux solides (211); et les bases de ces mêmes pyramides seront aussi semblables, puisqu'elles sont des faces homologues des deux solides; donc (209) ces pyramides seront semblables.

213. *Si de deux angles homologues on abaisse des perpendiculaires sur deux faces homologues, ces perpendiculaires seront entre elles dans le rapport de deux arêtes homologues quelconques.*

Car les deux angles homologues étant semblablement disposés à l'égard de deux faces homologues (210), doivent nécessairement être à des distances de ces faces, qui soient entre elles dans le rapport des dimensions homologues des deux solides.

De la Mesure des Surfaces des Solides.

214. Les surfaces des prismes et des pyramides étant composées de parallélogrammes, de triangles et de polygones rectilignes, nous pourrions nous dispenser de rien dire ici sur la maniere dont on doit s'y prendre pour les mesurer, puisque nous avons donné (145, 147 et 149) les moyens de mesurer les parties dont elles sont composées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce sujet quelques conséquences, qui non seulement serviront à simplifier les opérations qu'exigent ces mesures, mais nous seront encore utiles pour évaluer les surfaces des cylindres, des cônes, et même de la sphere.

215. *La surface d'un prisme quelconque (en n'y comprenant point les deux bases) est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme, par le contour d'une section* bdfhk (fig. 118), *faite par un plan auquel cette arête seroit perpendiculaire.*

Car, puisque l'arête AB est supposée perpendiculaire au plan *bdfhk*, les autres arêtes, qui sont toutes paralleles à

celle-là, seront aussi perpendiculaires au plan *bdfhk*; donc, réciproquement, les droites *bd*, *df*, *fh*, *hk*, etc. seront perpendiculaires chacune sur l'arête qu'elle coupe; en considérant donc les arêtes comme les bases des parallélogrammes qui enveloppent le prisme, les lignes *bd*, *df*, *fh*, etc. en seront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la surface du prisme, multiplier l'arête AB par la perpendiculaire *bd*; l'arête CD, par la perpendiculaire *df*, et ainsi de suite, et ajouter tous ces produits; mais, comme toutes les arêtes sont égales, il est évident qu'il revient au même d'en multiplier une seule AB par la somme de toutes les hauteurs, c'est-à-dire, par le contour *bdfhk*.

216. Quand le prisme est droit, la section *bdfhk* ne differe pas de la base BDFHK, et l'arête AB est alors la hauteur du prisme; donc *la surface d'un prisme droit* (*en n'y comprenant point les deux bases*) *est égale au produit du contour de la base, multiplié par la hauteur.*

217. Nous avons vu ci-dessus (136) qu'on pouvoit considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés; donc le cylindre peut être considéré comme un prisme dont le nombre des parallélogrammes qui composent la surface seroit infini; donc,

La surface d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de sa base. Nous avons vu (152) comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence.

On peut dire aussi que la surface *d'un cylindre droit est double de celle d'un cercle dont le rayon seroit moyen proportionnel entre la hauteur de ce cylindre et le rayon de sa base.*

Car, si l'on représente par H la hauteur, par *r* le rayon de la base, et par R le rayon moyen proportionnel, et qu'en même temps on représente par *cir. r* et *cir.* R les circonférences qui ont pour rayon *r* et R, on aura, par la supposition, $r : R :: R : H$; et puisque les circonférences sont proportionnelles (136) aux rayons, on a *cir. r* : *cir.* R :: R : H. Or, le produit des extrêmes de cette proportion est L

surface du cylindre, et le produit des moyens est le double de la surface du cercle qui a pour rayon R ; donc (Arith. 178), etc.

Dorénavant, pour marquer la surface d'un cercle qui a pour rayon une *ligne* quelconque R, nous emploierons aussi cette expression abrégée *cer.* R.

A l'égard du cylindre oblique, il faut multiplier sa longueur AB par la circonférence de la section *bgdh* (fig. 121), cette section étant faite comme il a été dit (215). La méthode pour déterminer la longueur de cette section dépend de connoissances plus étendues que celles que nous avons données jusqu'ici ; dans la pratique, il faut se contenter de la mesurer mécaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre chose équivalente), qu'on aura soin d'assujétir dans un plan auquel la longueur AB de ce cylindre soit perpendiculaire.

218. *Pour la pyramide*, si elle n'est pas réguliere, il faudra chercher séparément la surface de chacun des triangles qui la composent, et ajouter ces surfaces.

Mais si elle est réguliere, on peut avoir sa surface plus brièvement, en multipliant le contour de sa base par la moitié de l'apothême AG (fig. 124) ; car, tous les triangles étant de même hauteur, il suffit de multiplier la moitié de la hauteur commune par la somme de toutes les bases.

219. En considérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'est au fond qu'une pyramide réguliere, dont la surface (non comprise celle de la base) est composée d'une infinité de triangles, et que par conséquent *la surface convexe d'un cône droit est égale au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté* AB *de ce cône* (fig. 125).

A l'égard de la surface du cône oblique, elle dépend d'une géométrie plus composée ; ainsi nous n'en parlerons point ici. Au reste, la maniere dont nous venons de considérer le cône donne le moyen de le mesurer à-peu-près lorsqu'il est oblique. Il faut partager la circonférence de la

base en un assez grand nombre d'arcs, pour que chacun puisse être considéré, sans erreur sensible, comme une ligne droite; et alors on calculera la surface comme pour une pyramide qui auroit autant de triangles qu'on a d'arcs.

220. *Pour avoir la surface d'un tronc de cône droit, dont les bases opposées* BDGH, bdgh (fig. 127) *sont paralleles, il faut multiplier le côté* Bb *de ce tronc par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées.*

En effet, on peut concevoir cette surface comme l'assemblage d'une infinité de trapezes tels que EF*fe*, dont les côtés E*e*, E*f* tendent au sommet A; or, la surface de chacun de ces trapezes est égale à la moitié de la somme des deux bases opposées EF, *ef*, multipliée par la distance de ces deux bases (148): mais cette distance ne differe pas des côtés E*e*, F*f* ou B*b*; donc, pour avoir la somme de tous ces trapezes, il faut multiplier la moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que EF, *ef*, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux circonférences par la ligne B*b*, hauteur commune de tous ces trapezes.

221. Si par le milieu M du côté B*b* on conduit un plan parallele à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées, puisque son diametre MN (148) est la moitié de la somme de ces deux bases, et que (136) les circonférences sont entre elles comme leurs diametres; donc *la surface d'un cône tronqué, à bases paralleles, est égale au produit du côté du tronc par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

222. *La surface d'une sphere est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diametre.*

Concevez la demi-circonférence AKD (fig. 129) divisée en une infinité d'arcs; chacun de ces arcs, tel que KL, étant infiniment petit, se confondra avec sa corde.

Menons par les extrémités de KL les perpendiculaires KE, LF au diametre AD; et par le milieu I de KL ou de sa corde, menons IH parallele à KE, et le rayon IC; ce rayon sera perpendiculaire sur KL (52); tirons enfin KM perpendiculaire sur IH ou sur LF. Si l'on conçoit que la demi-circonférence AKD tourne autour de AD, elle engendrera la surface de la sphere, et chacun de ses arcs KL engendrera la surface d'un cône tronqué, qui sera un élément de celle de la sphere. Nous allons voir que la surface de ce cône tronqué est égale au produit de KM ou EF, multiplié par la circonférence qui a pour rayon IC ou AC.

Le triangle KML est semblable au triangle IHC, puisque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de prescrire. Ces triangles semblables donneront donc (112) cette proportion, KL : KM :: IC : IH; ou (puisque (136) les circonférences sont entre elles comme leurs rayons) KL : KM :: *cir.* IC : *cir.* IH (1); donc, puisque (Arith. 178) dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, KL × *cir.* IH est égal à KM × cir. IC, ou, ce qui revient au même, est égal à EF × cir. AC. Or (221), le premier de ces produits exprime la surface du cône tronqué engendré par KL; donc ce cône tronqué est égal à EF × *cir.* AC, c'est-à-dire, au produit de sa hauteur EF par la circonférence d'un grand cercle de la sphere. Et comme, en prenant tout autre arc que KL, on démontreroit la même chose et de la même maniere, on doit conclure que la somme des petits cônes tronqués qui composent la surface de la sphere, est égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle somme compose évidemment le diametre. Donc la surface de la sphere est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diametre.

---

(1) Par ces expressions *cir.* IC, *cir.* IH, nous entendons la circonférence qui a pour rayon IC, la circonférence qui a pour rayon IH.

223. Si l'on conçoit un cylindre (fig. 130) qui entoure la sphere en la touchant, et qui ait pour hauteur le diametre de cette sphere, c'est-à-dire, si l'on conçoit un cylindre circonscrit à la sphere, on pourra conclure que la *surface de la sphere est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit;* car (217) la surface de ce cylindre est égale au produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur : or, la circonférence de la base est celle d'un grand cercle de la sphere, et la hauteur est égale au diametre; donc, etc.

224. Puisque (151) pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diametre, et que pour avoir celle de la sphere, il faut multiplier la circonférence par le diametre, on doit donc dire que *la surface de la sphere est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.*

225. La démonstration que nous venons de donner de la mesure de la surface de la sphere, prouve également que pour avoir la surface convexe du segment sphérique qu'engendreroit l'arc AL (fig. 131) tournant autour du diametre AD, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphere par la hauteur AI de ce segment, et que pour avoir celle d'une portion de sphere comprise entre deux plans paralleles, tels que LKM, NRP, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphere par la hauteur IO de cette portion de sphere; car on peut considérer ces surfaces, ainsi qu'on l'a fait pour la sphere entiere, comme composées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun est égal au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphere.

Des Rapports des Surfaces des Solides.

226. Si deux solides dont on a dessein de comparer les surfaces sont terminés par des plans dissemblables et irréguliers, le seul parti qu'il y ait à prendre pour trouver le

rapport de leurs surfaces, est de calculer séparément la surface de chacun en mesures de même espece, et de comparer le nombre des mesures de l'une au nombre des mesures de l'autre, c'est-à-dire, par exemple, le nombre des pieds carrés de l'une au nombre des pieds carrés de l'autre.

227. *Les surfaces des prismes, en n'y comprenant point les bases opposées, sont entre elles comme les produits de la longueur de ces prismes, par le contour de la section faite perpendiculairement à cette longueur.*

Car ces surfaces sont égales à ces produits (215).

228. Donc, *si les longueurs sont égales, les surfaces des prismes seront entre elles comme le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur de chacun.*

Car le rapport des produits de la longueur par le contour de cette section ne changera point, si l'on omet, dans chacun de ces produits, la longueur qui en est facteur commun.

229. Donc *les surfaces des prismes droits ou des cylindres droits de même hauteur, sont entre elles comme les contours des bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases.*

Et si, au contraire, *les contours des bases sont les mêmes, et les hauteurs différentes, ces surfaces seront comme les hauteurs.*

230. *Les surfaces des cônes droits sont entre elles comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diametres de ces bases.*

Car ces surfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté du cône (219), doivent être entre elles comme ces produits, et par conséquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entre elles le même rapport que leurs rayons ou leurs diametres, on peut (99) substituer dans ces produits le rapport des rayons, ou celui des diametres à celui des circonférences.

231. *Les surfaces des solides semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues.*

Car elles sont composées de plans semblables, dont les surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, lesquelles lignes sont lignes homologues des solides, et proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les surfaces de deux spheres sont entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Car la surface d'une sphere étant quadruple de celle de son grand cercle, les surfaces de deux spheres doivent être entre elles comme le quadruple de leurs grands cercles, ou simplement comme leurs grands cercles; c'est-à-dire (162), comme les carrés des rayons ou des diametres.

De la Solidité des Prismes.

233. Pour fixer les idées sur ce qu'on doit entendre par la *solidité* d'un corps, il faut se représenter, par la pensée, une portion d'étendue de telle forme qu'on voudra, de la forme d'un cube, par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur, et concevoir que la capacité d'un corps est entièrement remplie de pareils cubes, que nous nommerons *points solides.* La totalité de ces points forme ce que nous entendons par *solidité d'un corps.*

234. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Car, si l'on imagine ces corps, coupés par des plans paralleles à leurs bases, en tranches infiniment minces, et d'une épaisseur égale à celle des points solides dont on peut imaginer que ces corps sont remplis, il est visible que dans chacun chaque section étant égale à la base (204), le nomb des points solides dont chaque tranche sera composée, sera

par-tout le même, et égal au nombre des points superficiels de la base; et comme on suppose même hauteur aux deux solides, ils auront chacun le même nombre de tranches; ils contiendront donc en totalité le même nombre de points solides : donc ils sont égaux en solidité.

De la Mesure de la Solidité des Prismes et des Cylindres.

235. La considération des points solides dont nous venons de faire usage, est principalement utile lorsque, pour démontrer l'égalité de deux solides, on est obligé de considérer ces solides dans leurs éléments mêmes, en les décomposant en tranches infiniment minces; nous aurons encore occasion de les considérer de cette maniere. Mais lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points solides qu'on y parvient; car on conçoit très bien que dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points.

Que fait-on donc, à proprement parler, quand on mesure la solidité des corps? On cherche à déterminer combien de fois le corps dont il s'agit contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipede rectangle ABCDEFGH (fig. 132), on a pour objet de connoître combien ce parallélipipede contient de cubes, tels que le cube connu x; c'est ordinairement en mesures cubiques qu'on évalue la solidité des corps.

Pour connoître la solidité du parallélipipede rectangle ABCDEFGH, il faut chercher combien sa base EFGH contient de parties carrées, telles que $efgh$; chercher pareillement combien la hauteur AH contient de fois la hauteur ah; et multipliant le nombre des parties carrées de EFGH par le nombre des parties de AH, le produit exprimera combien le parallélipipede proposé contient de cubes tels que x, c'est-à-dire, combien il contient de pieds cubes, ou de pouces cubes, etc., si le côté ah du cube x est d'un pied ou d'un pouce.

En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface EFGH autant de cubes, tels que *x*, qu'il y a de carrés, tels que *efgh*, dans la base EFGH. Tous ces cubes formeront un parallélipipede dont la hauteur HL sera égale à *ah* : or, il est évident qu'on pourra placer dans le solide ABCDEFGH autant de parallélipipedes, tels que celui-là, que la hauteur HL sera contenue de fois dans AH; donc il faut répéter ce parallélipipede ou le nombre des cubes répandus sur EFGH, autant de fois qu'il y a de parties dans AH; ou, puisque le nombre de ces cubes est le même que le nombre des carrés contenus dans la base, il faut multiplier le nombre des carrés contenus dans la base par le nombre des parties de la hauteur, et le produit exprimera le nombre des cubes contenus dans le parallélipipede proposé.

236. Puisqu'on a démontré (234) que les prismes de bases égales et de hauteurs égales sont égaux en solidité, il suit de cette proposition, et de ce que nous venons de dire, que pour avoir le nombre de mesures cubes que renfermeroit le prisme quelconque ACEGIKBDFH (fig. 118), il faut évaluer sa base KBDFH en mesures carrées, et sa hauteur LM en parties égales au côté du cube qu'on prend pour mesure, et multiplier le nombre des mesures carrées qu'on aura trouvées dans la base, par le nombre des mesures linéaires de la hauteur; ce qu'on exprime ordinairement en disant : *La solidité d'un prisme quelconque est égale au produit de la surface de la base, par la hauteur de ce prisme.*

Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (145) à l'occasion des surfaces : de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est, ainsi qu'on vient de le voir, un solide dont le nombre des cubes est le même que le nombre des carrés de la base, qu'on répete autant de fois que sa hauteur est comprise dans celle du solide total, c'est-à-dire, autant de fois qu'il l'est dans le solide qu'on veut mesurer.

237. Concluons de ce qui précede, que *pour avoir la solidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la surface de sa base par la hauteur de ce cylindre,* puisqu'un cylindre est égal à un prisme de même base et de même hauteur que lui (234).

De la Solidité des Pyramides.

238. Rappelons-nous ce qui a été dit (201), et en l'appliquant aux pyramides, nous en conclurons que, si l'on coupe deux pyramides IABCDF, IKLM (fig. 115) de même hauteur par un même plan *ge* parallele au plan de leur base (1), les sections *abcdf, klm* seront entre elles dans le rapport des bases ABCDF, KLM, et seront par conséquent égales, si ces bases sont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides coupées par un plan parallele au plan *ge*, et infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches solides, comprises entre ces deux plans infiniment voisins, doivent être aussi entre elles dans le rapport des bases; car le nombre des points solides nécessaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaisseur, ne peut dépendre que de la grandeur des sections correspondantes. Cela posé, comme les deux pyramides sont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une que dans l'autre; ainsi, les tranches correspondantes étant toujours dans le rapport des bases, les totalités de ces tranches, et par conséquent les solidités des pyramides, seront entre elles comme les bases. Donc *les solidités de deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme les bases de ces pyramides*, et par conséquent *les pyramides de bases égales et de hauteurs égales sont égales en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

---

(1) Nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait rendu le sommet commun, et qu'on ait placé les bases sur un même plan GE.

Mesure de la Solidité des Pyramides.

239. Puisque mesurer un corps n'est autre chose que chercher combien de fois il contient un autre corps connu, ou en général chercher quel est son rapport avec un autre corps connu, il ne s'agit donc, pour pouvoir mesurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les prismes. C'est ce que nous allons établir dans la proposition suivante.

240. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur qu'elle.*

La démonstration de cette proposition se réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur qu'elle; car on peut toujours concevoir un prisme comme composé d'autant de prismes triangulaires, et une pyramide comme composée d'autant de pyramides triangulaires qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone qui sert de base à l'un et à l'autre. (*Voyez* fig. 118.)

Or, voici comment on peut se convaincre de la vérité de la proposition pour la pyramide triangulaire. Soit ABCDEF (fig. 133) un prisme triangulaire : concevez que sur les faces AE, CE de ce prisme on ait tiré les deux diagonales BD, BF, et que suivant ces diagonales on ait conduit un plan BDF; ce plan détachera du prisme une pyramide de même base et de même hauteur que ce prisme, puisqu'elle a son sommet en B dans la base supérieure, et qu'elle a pour base la base même inférieure DEF du prisme : on voit cette pyramide isolée dans la figure 134, et la figure 135 représente ce qui reste du prisme.

On peut se représenter ce reste comme renversé ou couché sur la face ADFC; et alors on voit que c'est une pyramide quadrangulaire, qui a pour base le parallélogramme ADFC, et pour sommet le point B; donc, si l'on conçoit que dans la base ADFC on ait tiré la diagonale CD, on pourra se représenter que la pyramide totale ADFCB est

composée de deux pyramides triangulaires ADCB, CFDB, qui auront pour bases les deux triangles égaux ACD, CDF, et pour sommet commun le point B, et qui, par conséquent, seront égales (238). Or, de ces deux pyramides, l'une, savoir la pyramide ADCB, peut être conçue comme ayant pour base le triangle ABC, c'est-à-dire, la base supérieure du prisme, et pour sommet le point D, qui a appartenu à la base inférieure; cette pyramide est donc égale à la pyramide DEFB (fig. 134), puisqu'elle a même base et même hauteur que celle-ci; donc les trois pyramides DEFB, ADCB, CFDB sont égales entre elles; et puisque réunies elles composent le prisme, il faut en conclure que chacune est le tiers du prisme; ainsi la pyramide DEFB est le tiers du prisme ABCDEF de même base et de même hauteur qu'elle.

241. Puisqu'un cône peut être considéré comme une pyramide dont le contour de la base auroit une infinité de côtés, et le cylindre comme un prisme dont le contour de la base auroit aussi une infinité de côtés, il faut en conclure qu'*un cône droit ou oblique est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

242. Donc, *pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il faut multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur.*

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorsque les deux bases opposées sont paralleles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la solidité, consiste à trouver la hauteur de la pyramide retranchée; et alors il est aisé de calculer la solidité de la pyramide entiere et de la pyramide retranchée, et par conséquent celle du tronc. Par exemple, dans la figure 115, si je veux avoir la solidité du tronc KLM, *klm*, je vois (242) qu'il faut multiplier la surface KLM par le tiers de la hauteur IP; multiplier pareillement la surface *klm* par le tiers de la hauteur I*p*, et retrancher ce dernier produit du premier; mais comme on ne connoît ni la hauteur de la pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée, voici comment on déterminera l'une et l'autre.

On a vu ci-dessus (199) que les lignes IL, IM, IP, etc. sont coupées proportionnellement par le plan ge, et qu'elles sont à leurs parties Il, Im, Ip, comme LM : lm; on aura donc,

$$LM : lm :: IP : Ip;$$

Donc (Arith. 184) $LM - lm : LM :: IP - Ip : IP$.

C'est-à-dire, $LM - lm : LM :: Pp : IP$.

Or, quand on connoît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés LM, lm et la hauteur Pp; on pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrieme terme IP (179), ou la hauteur de la pyramide totale; et en retranchant celle du tronc, on aura la hauteur de la pyramide retranchée.

De la Solidité de la Sphere, de ses Secteurs, et de ses Segments.

244. *Pour avoir la solidité d'une sphere, il faut multiplier sa surface par le tiers du rayon.*

Car on peut considérer la surface de la sphere comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun sert de base à une petite pyramide qui a son sommet au centre de la sphere, et qui, par conséquent, a pour hauteur le rayon. Puis donc que chacune de ces petites pyramides est égale (242) au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c'est-à-dire, par le tiers du rayon, elles seront toutes ensemble égales au produit de la somme de toutes leurs bases par le tiers du rayon, c'est-à-dire, égales au produit de la surface de la sphere par le tiers du rayon.

245. Puisque la surface de la sphere est (224) quadruple de celle d'un de ses grands cercles, *on peut donc, pour avoir la solidité d'une sphere, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la surface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la surface d'un des grands cercles, ou enfin les deux tiers du diametre par la surface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la solidité d'un cylindre, nous avons vu

qu'il falloit multiplier la surface de la base par la hauteur ; s'il s'agit donc du cylindre circonscrit à la sphere (fig. 130), on peut dire que sa solidité est égale au produit d'un des grands cercles de la sphere par le diametre : or, celle de la sphere (245) est égale au produit d'un des grands cercles par les deux tiers du diametre ; donc *la solidité de la sphere n'est que les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.*

Si on veut comparer la solidité de la sphere au cube de son diametre, en représentant par D le diametre, on aura donc $\frac{2}{3}D \times$ *cer.* D pour cette solidité, ou bien $\frac{2}{3}D \times$ *cir.* $D \times \frac{1}{4}D$, ou $\frac{1}{6}\overline{D}^2 \times$ *cir.* D. Et le cube du diametre sera $\overline{D}^3$; donc la solidité de la sphere est au cube de son diametre, comme $\frac{1}{6}\overline{D}^2 \times$ *cir.* $D : \overline{D}^3$, ou :: $\frac{1}{6}$ *cir.* D : D, ou :: cir. D : 6 D, c'est-à-dire, comme la circonférence d'un cercle est à 6 fois son diametre. Par exemple, en prenant le rapport de 22 : 7 pour celui du diametre à la circonférence, la solidité de la sphere est au cube de son diametre, comme 22 est à 42, ou comme 11 est à 21.

247. La calotte sphérique AGBHEA, qui sert de base à un secteur sphérique CBGEHA (fig. 128), peut être aussi considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits ; et, par conséquent, le secteur sphérique lui-même peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides qui ont toutes pour hauteur le rayon, et dont la totalité des bases forme la surface de ce secteur ; donc *le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte par le tiers du rayon.* Nous avons vu (225) comment on trouve la surface de la calotte.

248. A l'égard du segment, comme il vaut le secteur CBGEHA, moins le cône CBGEH, ayant enseigné (247) et (242) la maniere de trouver la solidité de ces deux corps, il ne nous reste rien à dire sur cet article.

A l'égard du segment (fig. 128), comme il vaut le secteur CBGEHA moins le cône CBGEH, il sera toujours facile à calculer ; mais on peut calculer le segment d'une maniere plus commode.

La solidité d'un segment sphérique ABGEHA (fig. 128) *est égale à celle d'un cylindre qui auroit la fleche* AF *pour rayon de sa base,*

et qui auroit pour hauteur le rayon C A *de la sphere, moins le tiers de la fleche* A F.

Concevons la solidité de ce segment comme composée d'une infinité de tranches circulaires, paralleles à B G H E, et d'une épaisseur infiniment petite; le nombre des points solides de chaque tranche ne dépendant alors que de la section circulaire, pourra être représenté par cette section même; ainsi la tranche correspondante à I N, par exemple, pourra être représentée par *cer.* I N.

Menant la corde A N; à cause du triangle rectangle A I N, on aura *cer.* I N égal à *cer.* A N — *cer.* A I; donc la somme des *cer.* I N, ou la solidité du segment, sera égale à la somme des *cer.* A N moins la somme des *cer.* A I correspondants. Voyons donc ce que vaut chacune de ces deux sommes.

Puisque (170) A N est moyenne proportionnelle entre A I et A D, *cer.* A N est (217) moitié de la surface d'un cylindre qui auroit A I pour rayon de sa base, et A D pour hauteur, ou bien est égale à un cylindre qui auroit A I pour rayon de sa base, et A C pour hauteur. Donc la somme des *cer.* A N sera égale à la somme des enveloppes cylindriques, qui, ayant A C pour hauteur, auroient successivement pour rayons de leurs bases les différentes lignes A I. Donc la somme des *cer.* A N est égale à la solidité d'un cylindre qui auroit A C pour hauteur, et A F pour rayon de sa base.

A l'égard de la somme des *cer.* A I; si sur A C on conçoit le carré A C P Q, et qu'ayant tiré la diagonale A P, on prolonge A I jusqu'en R, on aura A I égale à I R; donc la somme des *cer.* A I sera égale à la somme des *cer.* I R, laquelle, prise de A en F, compose le cône qui auroit A F pour hauteur, et *cer.* F S ou *cer.* A F pour base. Elle est donc égale à ce cône, ou à un cylindre qui auroit aussi *cer.* A F pour base, et $\frac{1}{3}$ A F pour hauteur. Donc la somme des *cer.* A N, moins la somme des *cer.* A I, c'est-à-dire, la somme des *cer.* N I, ou la solidité du segment est égale au cylindre qui auroit *cer.* A F pour base, et A C pour hauteur, moins le cylindre qui auroit aussi *cer.* A F pour base, et $\frac{1}{3}$ A F pour hauteur, c'est-à-dire, est égale au cylindre qui auroit *cer.* A F pour base, et C A — $\frac{1}{3}$ A F pour hauteur.

Donc, pour avoir la solidité d'un segment sphérique, il faut multiplier le cercle, qui a pour rayon la fleche, par le rayon de la sphere, moins le tiers de la fleche.

Pour donner un exemple du calcul de la solidité de la sphere et de ses segments, supposons que l'on demande le poids d'une bombe de

10 pouces de diamètre, ayant 18 lignes d'épaisseur, avec un culot renforcé de 6 lignes de fleche. Le pied cube de fer coulé pese 519 ℔ $\frac{1}{4}$.

Nous calculerons d'abord la solidité de la sphere de 10 pouces, et ensuite nous calculerons celle d'une sphere de 7 pouces, c'est-à-dire, de 10 pouces moins le double de l'épaisseur de la bombe ; nous calculerons, dis-je, la solidité de cette derniere, diminuée de celle du culot de 6 lignes de fleche, c'est-à-dire, que nous ne calculerons de celle-ci que le segment sphérique qui auroit 7 pouces moins 6 lignes, ou 6 pouces $\frac{1}{2}$ de fleche.

Pour avoir la solidité de la sphere de 10 pouces, il faut (246) multiplier le cube de son diamètre par $\frac{11}{21}$; ainsi, opérant par logarithmes, j'ai

Log. 10.	1,0000000
Log. $\overline{10}^{3}$.	3,0000000
Log. 11.	1,0413927
Complément-Log. 21.	8,6777807
Somme.	12,7191734

qui répond à 523,81 ; donc la sphere de 10 pouces de diametre a une solidité de 523,81 pouces cubes.

Pour avoir la solidité du segment sphérique de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de fleche dans une sphere de 7 pouces de diametre, il faut (248) multiplier la surface du cercle de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, par le rayon de la sphere, moins le tiers de la fleche, c'est-à-dire, par 1 pouce et $\frac{1}{3}$.

Donc, et d'après ce qui a été dit, opérant par logarithmes, on aura

Log. 6 $\frac{1}{2}$.	0,8129134
Log. $\overline{6\frac{1}{2}}^{2}$.	1,6258268
Log. $\frac{22}{7}$.	0,4973247
Log. 1 $\frac{1}{3}$.	0,1249387
Somme.	2,2480902
qui répond à.	177,05

Donc la solidité du vide de la bombe est de 177,05 pouces cubes, et par conséquent la solidité du plein est de 346,76 pouces cubes.

Il ne s'agit donc plus, pour avoir le poids de la bombe, que de mul-

tiplier par $519\frac{3}{4}$, et de diviser par 1728, parceque le poids d'un pouce cube est la 1728ᵉ partie de celui du pied cube; ainsi

Log.	346,76.	2,5400290
Log.	$519\frac{3}{4}$.	2,7157945
Complément-Log.	1728.	6,7624563
	Somme.	12,0182798
	qui répond à.	104 lb,3

qui est le poids de la bombe, non compris le vide de l'œil ni le poids des anses et anneaux.

De la Mesure des autres Solides.

249. Pour les autres solides terminés par des surfaces planes, la méthode qui se présente naturellement pour les mesurer, c'est de les imaginer composés de pyramides qui aient pour bases ces surfaces planes, et pour sommet commun l'un des angles du solide dont il s'agit; mais, outre que cette méthode est rarement la plus commode, elle est d'ailleurs moins expéditive et moins propre pour la pratique que la suivante, que nous exposerons ici d'autant plus volontiers, qu'elle peut être employée utilement à la mesure de la solidité de la carene des vaisseaux, comme nous le ferons voir quand nous aurons établi les propositions suivantes.

250. Nous appellerons *prisme tronqué* le solide ABCDEF (fig. 136), qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme par un plan ABC incliné à la base.

251. *Un prisme triangulaire tronqué est composé de trois pyramides qui ont chacune pour base la base* DEF *du prisme, et dont la premiere a son sommet en* B, *la seconde en* A, *et la troisieme en* C.

Avec une légere attention, on peut se représenter le prisme tronqué comme composé de deux pyramides; l'une triangulaire, qui aura son sommet au point B, et pour base le triangle DEF; la seconde, qui aura aussi son sommet au point B, mais qui aura pour base le quadrilatere ADFC.

Si l'on tire la diagonale AF, on peut se représenter la pyramide quadrangulaire BADFC comme composée de deux pyramides triangulaires BADF, BACF : or, la pyramide BADF est égale en solidité à une pyramide EADF, qui, ayant la même base ADF, auroit son sommet au point E; car la ligne BE étant parallele au plan ADF, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide EADF peut être considérée comme ayant pour base EDF, et son sommet au point A; voilà donc, jusqu'ici, deux des trois pyramides dont nous avons dit que le prisme tronqué doit être composé; il ne reste donc plus qu'à faire voir que la pyramide BACF est équivalente à une pyramide qui auroit aussi pour base EDF, et qui auroit son sommet en C; or, c'est ce qu'il est facile de voir en tirant la diagonale CD, et faisant attention que la pyramide BACF doit être égale à la pyramide EDCF; parceque ces deux pyramides ont leurs sommets B et E dans la même ligne BE parallele au plan ACFD de leurs bases, et que ces bases ACF et CFD sont égales, puisque ce sont des triangles qui ont même base CF, et qui sont compris entre les paralleles AD et CF. Ainsi la pyramide BACF est égale à la pyramide EDCF; mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base DEF, et son sommet en C; donc, en effet, le prisme tronqué est composé de trois pyramides qui ont pour base commune le triangle DEF, et dont la premiere a son sommet en B, la seconde en A, la troisieme en C.

252. Donc, *pour avoir la solidité d'un prisme triangulaire tronqué, il faut abaisser de chacun des angles de la base supérieure une perpendiculaire sur la base inférieure, et multiplier la base inférieure par le tiers de la somme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences pour la mesure des prismes tronqués autres que les triangulaires, et même pour d'autres solides : si l'on conçoit, par exemple, que de tous les angles d'un solide terminé par des surfaces planes, on mene sur un même plan,

pris comme on le voudra, des perpendiculaires, on fera naître autant de prismes tronqués qu'il y aura de faces dans le solide; comme chaque prisme tronqué devient facile à mesurer, d'après ce que nous venons de dire, tout solide terminé par des surfaces planes se mesurera donc aussi facilement par les mêmes principes: nous n'entrerons pas dans ce détail; nous nous bornerons à en tirer une conséquence utile à notre objet.

Par exemple, s'il s'agit de trouver la solidité du corps ABCDHEFG (fig. 137 et 198), composé de deux prismes triangulaires tronqués, dont les arêtes AE, BF, CH, DH soient perpendiculaires à la base, qui sera d'ailleurs un quadrilatere quelconque.

On imaginera la diagonale EG correspondante à l'arête AC, et l'on aura $EFG \times \frac{AE + BF + CG}{3}$ pour la solidité de la partie qui répond au triangle EFG; on aura pareillement $EHG \times \frac{AE + DH + CG}{3}$ pour la solidité de la partie qui répond au triangle EHG.

Si les deux triangles EFG, EGH sont égaux, comme il arrive, lorsque la base est un parallélogramme, on aura $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{2AEE + 2CG + BF + DG}{3}$ pour la solidité totale.

Si les perpendiculaires AE, BF, etc. restant les mêmes, la surface supérieure, au lieu d'être terminée par les deux plans ADC, ABC qui ont pour section commune AC, étoit terminée par deux plans qui eussent pour section commune BD; alors la solidité seroit exprimée par $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{2BF + 2DH + AE + CG}{3}$.

Si, après avoir ajouté ce solide au précédent, on prend moitié du tout, on aura $EFCH \times \frac{BF + DH + AE + CG}{4}$ pour la valeur du solide qui tiendroit le milieu entre les deux que nous venons de considérer pour chaque figure.

Cette derniere expression renferme la regle que suivent plusieurs praticiens pour mesurer la solidité des corps, tels que ceux des figures 137 et 198; d'où l'on voit que cette regle n'est pas rigoureusement exacte; on peut même ajouter qu'elle peut souvent conduire à une erreur assez forte : pour nous en convaincre, prenons un cas fort simple; supposons (fig. 198) que AE et GC soient chacune zéro, on

aura $\frac{1}{2}$ EFGH $\times \frac{BF + DH}{3}$ ou EFGH $\times \frac{BF + DH}{6}$ pour la solidité du corps représenté par la figure 132; mais, par la regle dont il s'agit, on auroit EFGH $\times \frac{BF + DH}{4}$; or, ces deux solides sont l'un à l'autre :: $\frac{1}{6}$: $\frac{1}{4}$ ou :: 4 : 6 :: 2 : 3; cette regle feroit donc trouver la solidité trop forte de moitié en sus de sa véritable valeur; il est vrai que dans ce cas, où il est facile de voir que le solide est composé de deux pyramides triangulaires, on verroit facilement que l'on ne doit point admettre cette regle; mais il n'en est pas moins à conclure, de cet exemple simple, que l'application aux cas plus composés ne donne point une approximation suffisante.

Tout ce que nous venons de dire, ne supposant point que ABC et ADC (fig. 137 et 198) soient dans des plans différents, a également lieu lorsqu'ils sont dans un même plan; et puisque ce qui a été dit a lieu lorsque la base est un quadrilatere quelconque, il est facile d'en conclure la mesure de la solidité d'un ponton (fig. 199).

L'avant et l'arriere du ponton, ses flancs, son fond, et son ouverture supérieure, sont tous des surfaces planes; et les arêtes formées par les flancs, le fond et l'ouverture, sont des lignes paralleles; l'ouverture a plus de largeur que le fond; en sorte que la section faite perpendiculairement à la longueur est un trapeze tel que EFGH.

Si donc on conçoit le ponton coupé perpendiculairement à sa longueur, et au milieu, il résulte évidemment de ce qui a été dit (254), que chaque moitié est un composé de deux prismes triangulaires tronqués, dont l'un a pour expression EHG $\times \frac{AE + DH + CG}{3}$, ou EHG $\times \frac{2AE + CG}{3}$, parceque AE est égal à DH. Pareillement, le second prisme triangulaire aura pour expression EFG $\times \frac{2CG + AE}{3}$; donc le ponton entier aura pour expression EHG $\times \frac{2AI + CL}{3}$ $+$ EFG $\times \frac{2CL + AI}{3}$. Or, la profondeur du ponton étant connue, on aura la hauteur commune des deux triangles, qui par conséquent seront faciles à calculer; il sera donc facile d'avoir la solidité du ponton : nous en verrons un exemple dans peu.

L'avant et l'arriere du ponton sont communément inclinés de 45 degrés sur le fond : cette circonstance peut fournir une autre expression; mais comme elle n'est pas plus simple que la précédente, nous ne nous y arrêterons pas.

254. Soit donc ABCDEFGH (fig. 137) un solide composé de deux prismes triangulaires tronqués ABCEFG, ADCEHG, dont les arêtes AE, BF, CG, DH soient perpendiculaires à la base, et qui soient tels que les bases EFG, EHG forment le parallélogramme EFGH, et que les bases supérieures soient, pour plus de généralité, deux plans différemment inclinés à la base EFGH. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus (252), que le solide ABCDEFG est égal au triangle EFG multiplié par $\frac{BF + 2AE + 2GC + HD}{3}$; car le prisme tronqué ABCEFG est égal (252) au triangle EFG multiplié par $\frac{BF + AE + GC}{3}$; et par la même raison, le prisme tronqué ADCEHG est égal au triangle EHG, ou, ce qui revient au même, au triangle EFG multiplié par $\frac{AE + GC + HD}{3}$; donc la totalité de ces deux prismes tronqués est égale au triangle EFG multiplié par $\frac{BF + 2AE + 2GC + HD}{3}$.

Soit maintenant un solide (fig. 138) compris entre deux plans ABLM, *ablm* paralleles, deux autres plans AB*ba*, ML*lm* paralleles entre eux, et perpendiculaires aux deux autres, un plan BL*lb* perpendiculaire à ceux-là, et enfin la surface courbe AHM*mha*; et concevons ce solide coupé par des plans C*d*, E*f*, G*h*, etc. paralleles à AB*ba*, également distants les uns des autres, et assez près pour qu'on puisse regarder AD, *ad*, DF, *df*, etc. comme des lignes droites : supposons enfin que les deux plans ABLM, *ablm* sont assez près l'un de l'autre pour qu'on puisse regarder, sans erreur sensible, les sections D*d*, F*f*, H*h*, etc. comme des lignes droites; il est visible que les solides partiels AD*dab*BC*c*, DF*fdc*CE*e*, etc. sont dans le cas du solide de la figure 137. Donc la totalité de ces solides sera égale au triangle *b*BC multiplié par $\frac{AB + 2ab + 2CD + cd}{3} +$ $\frac{CD + 2cd + 2EF + ef}{3} + \frac{EF + 2ef + 2GH + gh}{3} + \frac{GH + 2gh + 2IK + ik}{3}$

$+\frac{IK+2ik+2LM+ml}{3}$; c'est-à-dire, en réunissant les quantités semblables, sera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$; et comme le triangle bBC est égal à $\frac{Bb\times BC}{2}$, le solide entier sera égal à $\frac{Bb\times BC}{2}\times$ $(\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm)$.

Dans la vue de rendre cette expression plus simple, remarquons que si au lieu de $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$ que l'on a entre les deux parentheses, on avoit la quantité $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm$, le solide en question seroit égal à la moitié de la somme des deux surfaces $ABLM$, $ablm$, multipliée par l'épaisseur Bb; car (151) la surface $ABLM$ est égale à $BC\times(\frac{1}{2}AB+CD+EF+GH+IK+\frac{1}{2}LM)$, et la surface $ablm$ est, par la même raison, égale à bc ou $BC\times(\frac{1}{2}ab+cd+ef+gh+ik+\frac{1}{2}lm)$; donc la moitié de la somme de ces deux surfaces multipliées par l'épaisseur Bb, seroit $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)$: donc le solide en question ne differe de ce produit que de la quantité dont $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm)$ surpasse la quantité $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)$; or, il est aisé de voir (Arith. 103) que cette différence est $\frac{Bb\times BC}{2}+(\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm)$; donc le solide cherché est égal à $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)+\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm)$; or, il est aisé de remarquer que $\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm$ est une quantité fort petite en comparaison de celle qui est entre les deux premieres parentheses, puisque les deux plans $ABLM$,

ablm étant supposés peu distants, la différence de AB à *ab* et celle de LM à *lm* ne peuvent être que de fort petites quantités; on peut donc réduire la valeur de ce solide à $\frac{Bb+BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$, c'est-à-dire, à $Bb \times \left(\frac{ABLM + ablm}{2}\right)$.

On peut donc dire que, pour avoir la solidité d'une tranche de solide comprise entre deux surfaces planes paralleles, de telle figure qu'on voudra, et peu distantes l'une de l'autre, il faut multiplier la moitié de la somme de ces deux surfaces par l'épaisseur de cette tranche.

255. Si l'épaisseur B*b* de la tranche étoit trop considérable pour qu'on pût regarder A*a*, D*d* comme des lignes droites, il faudroit concevoir le solide partagé en plusieurs tranches d'égale épaisseur, par des plans paralleles à l'une des surfaces ABLM, *ablm*, et mesurant ces surfaces ABLM, *ablm* et leurs paralleles, on auroit la solidité en ajoutant toutes les surfaces intermédiaires, et la moitié de la somme des deux extrêmes ABLM, *ablm*, et multipliant le tout par l'épaisseur d'une des tranches; c'est une suite immédiate de ce que nous venons de dire.

L'application de ceci à la mesure de la partie de la carène que la charge du navire fait plonger dans la mer, est maintenant très facile. On mesurera la surface des deux coupes horizontales faites à fleur d'eau lorsque le navire est chargé et lorsqu'il est vide. On ajoutera ces deux surfaces, et on multipliera la moitié de leur somme par la distance de ces deux surfaces, c'est-à-dire, par l'épaisseur de la tranche qu'elles comprennent.

Si l'on vouloit avoir la solidité de la carène entiere, on feroit usage de ce qui vient d'être dit (255); mais il faudroit la considérer comme coupée en plusieurs tranches, non pas paralleles à la coupe faite à fleur d'eau, mais perpendiculaires à la longueur du navire.

Lorsqu'on mesure le volume de la partie de la carêne que la charge fait plonger, on peut se contenter de mesurer la surface de la coupe prise à égale distance des deux coupes dont nous avons parlé ci-dessus, et la multiplier, comme ci-devant, par l'épaisseur de la tranche; car cette coupe moyenne différera toujours très peu de la moitié de la somme des deux autres.

Parmi quelques uns des objets que nous considérerons dans l'application de l'algebre à la géométrie, on trouvera des méthodes plus rigoureuses; néanmoins celles que nous venons d'exposer seront toujours suffisantes, tant qu'on aura soin de mesurer les surfaces avec assez d'exactitude, et de multiplier les tranches lorsque l'épaisseur est considérable.

Nous verrons dans la quatrieme partie de ce Cours, que la charge du navire est égale au poids d'un volume d'eau égal au volume de la partie de la carêne qu'elle fait plonger; lors donc qu'on a évalué ce volume en pieds cubes, si l'on veut connoître la pesanteur de la charge, il n'y a qu'à multiplier le nombre des pieds cubes par 72℔, qui est à-peu-près le poids d'un pied cube d'eau de mer; mais comme on évalue toujours cette charge en tonneaux, au lieu de multiplier par 72, pour diviser ensuite par 2000, ce qui seroit nécessaire pour réduire en tonneaux, on divisera seulement le nombre des pieds cubes par 28, parceque 28 fois 72 faisant à-peu-près 2000, autant de fois il y aura 28 dans la solidité mesurée, autant il y aura de tonneaux.

Du Toisé des Solides.

256. Après ce que nous avons dit (155) sur le toisé des surfaces, il doit y avoir fort peu de choses à dire sur le toisé des solides.

Pour évaluer un solide en toises cubes et parties de la toise cube, on peut s'y prendre de deux manieres principales. La *premiere est de* compter par toises cubes et par

parties cubes de la toise cube, c'est-à-dire, par toises cubes, pieds cubes, pouces cubes, etc.

La *toise cube* ou *cubique* contient 216 pieds cubes, parceque c'est un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large et 6 pieds de haut.

Le *pied cube* contient 1728 pouces cubes, parceque c'est un cube qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large, et 12 pouces de haut.

Par la même raison, on voit que le *pouce cube* contient 1728 lignes cubes, et ainsi de suite.

257. Donc, pour évaluer un solide en toises cubes et parties cubes de la toise cube, il faudra réduire chacune de ses trois dimensions à la plus petite espece; multiplier deux de ces dimensions ainsi réduites l'une par l'autre, et le produit résultant par la troisieme; et pour réduire en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes et toises cubes, en supposant que la plus petite espece ait été des points, on divisera successivement par 1728, 1728, 1728 et 216; ou seulement par 1728, 1728 et 216, si la plus petite espece est seulement des lignes, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a un parallélipipede qui ait $2^T 4^P 8^p$ de long, $1^T 3^P$ de large, et $3^T 5^P 7^p$ de haut, on réduira ces trois dimensions à 200^p, 108^p et 283^p, qui, étant multipliées, savoir, 200 par 108, et le produit 21600^{pp} par 283^p, donneront 6112800 pouces cubes, ou 6112800^{ppp}; divisant donc par 1728, on aura 3537 pieds cubes ou 3537^{PPP}, et 864 de reste, c'est-à-dire, 864^{ppp}; divisant 3537^{PPP} par 216, on aura 16 toises cubes ou 16^{TTT} et 81^{PPP}; en sorte que le parallélipipede en question contient $16^{TTT}\ 81^{PPP}\ 864^{ppp}$.

258. Dans la seconde maniere d'évaluer les solides en toises cubes et parties de la toise cube, on se représente la toise cube partagée en six parallélipipedes, qui ont tous une toise carrée de base sur un pied de haut, et que pour cette raison on appelle *toise-toise-pieds*. On conçoit de même la toise-toise-pied partagée en douze parallélipipedes, qui ont chacun une toise carrée de base et un pouce de haut, et

qu'on appelle *toise-toise-pouces ;* on subdivise de même chacune de celles-ci en douze parallélipipedes, qui ont chacun une toise carrée de base sur une ligne de haut ; et on continue de subdiviser en parallélipipedes, qui ont constamment une toise carrée de base sur un point, une prime, une seconde, etc. de haut ; en sorte que les subdivisions sont absolument analogues à celles de la toise linéaire, comme nous avons vu que l'étoient celles de la toise carrée ; et les noms de ces différentes subdivisions ne different de ceux qui sont relatifs à la toise carrée, qu'en ce que le mot *toise* y est énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette division de la toise cube sont absolument les mêmes que celles que nous avons enseignées relativement à la toise carrée.

A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entre eux comme exprimant des toises cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., et les deux autres comme marquant des nombres abstraits dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur. Par exemple, en reprenant le parallélipipede que nous venons de calculer ci-dessus, et supposant que la longueur AD (fig. 139) est de $2^T\ 4^P\ 8^P$, la largeur A B de $1^T\ 3^P$, et la hauteur A L de $3^T\ 5^P\ 7^P$; si l'on prend AI et AE chacun d'une toise, et qu'on se représente le parallélipipede AIFEHGKD, il est visible que ce parallélipipede est de $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$, puisqu'il a une toise carrée de base sur une longueur de $2^T\ 4^P\ 8^p$. Or, pour avoir la solidité du parallélipipede total, on voit qu'il faut répéter ce parallélipipede partiel d'abord autant de fois que sa largeur AI est contenue dans la largeur A B, c'est-à-dire, une fois et demie, ou autant que le marque $1^T\ 3^P$; puis répéter ce produit autant de fois que la hauteur A E est contenue dans la hauteur A L, c'est-à-dire, autant de fois que le marque $3^T\ 5^P\ 7^P$, considéré comme nombre abstrait.

Mais pour se guider plus aisément dans ces multiplications, on laissera aux facteurs les signes de la toise tels qu'ils

les ont ; il suffit de savoir que le produit doit être des toises cubes, toise-toise-pieds, etc. ; ainsi, en opérant comme au toisé des surfaces, on trouvera comme il suit :

2^{T}	4^{P}	8^{P}	
1^{T}	3^{P}		
2^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	
0	3		
0	1		
0	0	4	
0	0	4	
1	2	4	
4^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	
3^{T}	5^{P}	7^{P}	
12^{TTT}	0^{TTP}	0^{PPp}	0^{TTi}
0	3	0	
2	0	6	
0	4	2	
0	4	2	
0	2	1	
0	0	4	2
16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTi}

259. Il est aisé de convertir ces parties de la toise en parties cubes, c'est-à-dire, pieds cubes, pouces cubes, etc. Il faut écrire sous les parties de la toise, à commencer des toise-toise-pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$; 36, 3, $\frac{1}{4}$ consécutivement, et multiplier chaque nombre supérieur par son correspondant inférieur ; porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$ chacun au-dessous du premier de ces nombres ; et lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il restera 1 ou 2 ou 3, on écrira sous le nombre 36 suivant, 432 ou 864 ou 1296, pour commencer une seconde colonne. Appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner,

16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}	$0^{TTp'}$
	36	3	$\frac{1}{4}$	36
16^{TTT}	72^{PPP}	. . . . . .		864^{PPP}
	9			
16^{TTT}	81^{PPP}	864^{PPP}		

on trouve le même produit que par la premiere méthode.

On multiplie les toise-toise-pieds par 36, parceque la toise-toise-pied ayant un pied de haut sur une toise carrée ou 36 pieds carrés de base, doit contenir 36 pieds cubes. La toise-toise-pouce étant la douzieme partie de la toise-toise-pied, doit contenir la douzieme partie de 36 pieds cubes, c'est-à-dire, 3 pieds cubes; il faut donc multiplier par 3 les toise-toise-pouces. Pareillement, la toise-toise-ligne étant la douzieme partie de la toise-toise-pouce, doit contenir la douzieme partie de 3 pieds cubes ou un quart de pied cube, ou (à cause que le pied cube vaut 1728 pouces cubes) elle doit contenir 432^{PPP}; en raisonnant de même, on voit que la toise-toise-point vaudroit 36^{PPP}, parcequ'elle est la douzieme partie de la toise-toise-ligne qui vaut 432^{PPP}, dont la douzieme partie est 36; donc, etc.

Donc, réciproquement, pour ramener les parties cubes de la toise cube à des toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., il faudra diviser par 36 le nombre des pieds cubes, et l'on aura les toise-toise-pieds : on divisera le reste de cette division par 3, et l'on aura les toise-toise-pouces. On multipliera par 4 le reste de cette seconde division, et au produit on ajoutera 1, ou 2, ou 3 unités, selon que le nombre des pouces cubes sera entre 432 et 864, ou 864 et 1296, ou 1296 et 1728, et l'on aura les toise-toise-lignes; puis, retranchant du nombre des pouces cubes le nombre 432, ou 864, ou 1296, selon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera sur le reste comme on a opéré sur les pieds cubes, et l'on aura consécutivement les toise-toise-points, les toise-

toise-primes, et les toise-toise-secondes; enfin on continuera de la même maniere pour les lignes cubes, etc.

Par exemple, si l'on demande de réduire en toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. le nombre $47^{TTT}\,52^{PPP}\,932^{ppp}$; je divise 52 par 36, et j'ai 1^{TTP}, et un reste de 16; je divise celui-ci par 3, et j'ai 5^{TTp}, et un reste de 1; je quadruple ce reste, et j'y ajoute 2 unités, parceque le nombre des pouces cubes est entre 864 et 1296, et j'ai $6^{TT'}$. Retranchant 864 de 932, il reste 68; je le divise par 36, et j'ai 1^{TTpt}, et 32 de reste; je divise celui-ci par 3, et j'ai $10^{TT'}$, et 2 de reste; je quadruple ce reste, et j'ai $8^{TT''}$; en sorte que j'ai en total, $47^{TTT}\,1^{TTP}\,5^{TTp}\,1^{TTpt}\,10^{TT'}\,8^{TT''}$.

Si au lieu de rapporter la solidité à la toise cube, on vouloit la rapporter au pied cube, on le pourroit également, en concevant le pied cube comme composé de douze parallélipipedes, qui ont tous un pied carré de base, sur un pouce de hauteur chacun, et qu'on marqueroit ainsi PP^{P}, pour exprimer *pied-pied-pouces;* c'est ainsi que nous allons en user dans l'exemple suivant.

Exemple appliqué à la solidité d'un ponton.

Soit (fig. 199) la plus grande largeur EH, de	4^{P}	4^{p}
La plus petite FG, de	4	2
Leur distance ou le creux du ponton.	2	4
La plus grande longueur AI.	18	0
La plus petite CL.	13	4
Donc 2AI + CL.	49^{P}	4^{p}
Et 2CL + AI.	44	8

Je calcule la surface du triangle EHG, et celle du triangle EFG, qui ont pour hauteur commune le creux du ponton, et je trouve comme il suit:

	4^{P}	4^{P}	
	2	4	
	8	8	
Pour 4^{P}. . .	1	5	4
Somme. . .	10	1	4
Moitié. . .	5^{PP}	0^{Pp}	8^{Pl} Tr. EHG.

	4^{P}	2^{P}	
	2	4	
	8	4	
Pour 4^{P}. . .	1	4	8
Somme. . .	9	8	8
Moitié. . .	4^{PP}	10^{Pp}	4^{Pl} Tr. EFG.

Je multiplie la premiere par 2 AI+CL, et la seconde par 2 CL+AI, et prenant le tiers du tout, j'ai la solidité du ponton comme il suit :

	5^{pp}	0^{pp}	8^{pl}			4^{pp}	10^{pp}	4^{pl}	
	49	4				44^{p}	8^{p}		
	247	8	8			213	10	8	
Pour 4^{p}. .	1	8	2	8	Pour 6^{p}. .	2	5	2	
					Pour 2. . .	0	9	8	8
Somme. .	249^{ppp}	4^{ppp}	10^{ppl}	8^{pppt}.	Somme. .	217^{ppp}	1^{ppp}	6^{ppl}	8^{pppt}.

Réunissant ces deux sommes, et prenant le tiers, on a 155^{ppp} 6^{ppp} 1^{ppl} 9^{pppt} 4^{ppt} pour la solidité du ponton.

Exemple appliqué au toisé d'une batterie.

Pour donner encore une application des prismes tronqués et du toisé, supposons qu'on demande la quantité de terre nécessaire à la construction de l'épaulement d'une batterie de quatre pieces de canon.

La longueur d'une pareille batterie est de 13^{T} 2^{P} par le bas. La hauteur de l'épaulement, en dedans, est ordinairement de 1^{T} 1^{P}; et en dehors, elle est de 1^{T} 0^{P} 4^{P}. Le talus intérieur est le tiers de la hauteur intérieure, et l'extérieur est la moitié de la hauteur extérieure; ainsi le premier est de 2^{P} 4^{P}, et le second de 3^{P} 2^{P}; la largeur de la base est de 3^{T} 5^{P} 6^{P}, ainsi la largeur au sommet extérieur de l'épaulement est de 3^{T} 0^{P} 0^{P}. On donne aux deux côtés de l'épaulement le même talus qu'au-dedans, c'est-à-dire, le tiers de la hauteur intérieure vers le dedans, et le tiers de la hauteur extérieure vers le dehors; ainsi la longueur intérieure de l'épaulement, vers le haut, est de 12^{T} 3^{P} 4^{P}, et sa longueur extérieure vers le haut est de 12^{T} 3^{P} 9^{P} 4^{l}.

Ces dimensions établies, on peut considérer le massif de la batterie (abstraction faite des embrasures) comme un prisme tronqué, dont la coupe, faite perpendiculairement à sa longueur, seroit le trapeze EFGH (fig. 200), dont

La base HE est de	3^{T}	5^{P}	6^{P}
Le talus intérieur HK.	0	2	4
La hauteur GK de l'angle G.	1	1	0
Le talus extérieur IE.	0	3	2
La hauteur IF de l'angle F.	1	0	4

Et si on conçoit que cette coupe soit faite au milieu de la longueur, ce prisme total est partagé en deux prismes droits, tronqués, parfaitement égaux, et qui ont chacun pour base le trapeze EFGH. Si l'on imagine donc la diagonale GE, il suit de ce qui a été dit, qu'on aura la solidité d'une des moitiés en multipliant le triangle EFG par le tiers de la somme des trois arêtes, qui, d'un même côté, répondent aux angles F, E, G, y ajoutant le produit du triangle EGH, multiplié pareillement par la somme des trois arêtes, qui, du même côté, répondent aux angles E, G, H, et doublant le tout; mais puisque ces arêtes sont moitié des longueurs qui répondent à ces mêmes angles, ou des arêtes du prisme total, il s'ensuit que l'opération consiste à multiplier le triangle EFG par le tiers de la somme des trois arêtes totales qui répondent aux angles E, F, G, et le triangle EGH par le tiers de la somme de celles qui répondent aux trois angles E, G, H, et à ajouter ces deux produits.

Or, ces arêtes sont respectivement comme il suit :

Arêtes	En E.	13^{T}	2^{P}	0^{p}	0^{l}
	En G.	12	3	4	0
	En F.	12	3	9	4
	En H.	13	2	0	0

Le tiers des trois arêtes en E, F, G, sera donc 12^{T} 5^{P} 0^{p} 5^{l} 4^{pt}

Et le tiers des trois arêtes en E, G, H, sera . 13^{T} 0^{P} 5^{p} 4^{l}

Il ne s'agit donc que d'avoir la surface du triangle EFG, et celle du triangle EGH; or, la seconde est évidemment égale à $\frac{HE \times GK}{2}$, et la premiere, qui est la différence entre le quadrilatere LFGH et le triangle EGH, sera $EK \times \frac{1}{2}FI - EI \times \frac{1}{2}GK$; d'où, et d'après les mesures ci-dessus, on trouvera comme il suit :

Le triangle EGH.	2^{TT}	1^{TP}	8^{Tp}	6^{Tl}	0^{Tpt}	
$EK \times \frac{1}{2}FI$.	1	5	2	0	8	
$EI \times \frac{1}{2}GK$.	0	1	10	2	0	
Triangle EFG.	1	3	3	10	8	
Donc le prisme correspondant au triangle EGH.	29^{TTT}	5^{TTP}	2^{TTp}	8^{TTl}	2^{TTpt}	$8^{TT'}$
Et le prisme correspondant au triangle FGE.	19	5	8	7	2	1
Massif de la batterie.	49^{TTT}	4^{TTP}	11^{TTp}	5^{TTl}	4^{TTpt}	$9^{TT'}$

A l'égard des embrasures, si l'on suppose que leur fond est horizontal, que l'ouverture intérieure est de 2^P haut et bas, l'extérieure de 9^P en bas, et 12^P 6^p en haut; que la hauteur de l'embrasure est de 3^P 6^p du côté intérieur de la batterie; en concevant chacune coupée perpendiculairement à la longueur de la batterie, on verra que le profil peut en être représenté par le quadrilatere FGDM, dans lequel on aura GO de 3^P 6^p, FN de 2^P 10^p, et les talus DO et NM seront, savoir : DO de 1^P 2^p, et NM de 1^P 5^p, d'où on conclura que DM est de 3^T 2^P 7^p ; et comme le solide de l'embrasure est aussi un prisme tronqué, dont toutes les dimensions sont actuellement connues, on conclura, par un calcul semblable au précédent, que le solide des quatre embrasures est de 6^{TTT} 3^{TTP} 1^{TTp} 6^{TTl} 3^{TTpt} $1^{TT'}$, lequel retranché du massif trouvé ci-dessus, il reste 43^{TTT} 1^{TTP} 9^{TTp} 9^{TTl} 1^{TTpt} $8^{TT'}$ pour la totalité des terres nécessaires à la construction de l'épaulement; d'où il est facile de conclure le nombre de travailleurs nécessaire pour construire cette batterie dans un temps déterminé, sachant, par expérience, que trois hommes, sans trop se fatiguer, peuvent creuser et rapporter sur la batterie une toise cube en 18 heures.

260. Puisque, pour avoir la solidité d'un prisme, il faut multiplier la surface de sa base par sa hauteur, il s'ensuit que si, connoissant la solidité et la base ou la hauteur, on veut avoir la hauteur ou la base, il faut diviser la solidité par celui de ces deux facteurs que l'on connoîtra. Mais il faut observer que, dans l'exactitude, ce n'est point véritablement la solidité que l'on divise par la surface ou par la hauteur, mais c'est un solide que l'on divise par un solide. En effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit que lorsqu'on évalue un solide, on répete un autre solide de même base autant de fois que la hauteur de celui-ci est contenue dans la hauteur du premier, ou bien on répete un solide de même hauteur autant de fois que la surface de la base de celui-ci est comprise dans la base de celui-là. Donc, quand on voudra, connoissant la solidité et la surface de la base, par exemple, connoître la hauteur, il faudra chercher combien de fois la solidité proposée contient celle d'un solide de même base, et le quotient marquera, par le nombre de ses unités, le nombre des parties de la hauteur.

Cela posé, si ayant, par exemple, un prisme dont la solidité soit de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, et la surface de la base $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{Tp}$, on veut savoir quelle est la hauteur, on considérera le diviseur, non pas comme $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{Tp}$, mais comme $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}$, et alors la question se réduira à diviser $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$ par $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}$; mais comme la toise carrée est facteur commun, le quotient sera le même que si le dividende et le diviseur marquoient des toises linéaires; on aura donc simplement $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$ à diviser par $12^{T}\ 0^{P}\ 0^{p}$, c'est-à-dire, par 12^{T}; et comme la nature de la question fait voir que le quotient doit être des toises linéaires, la division se fera donc selon la regle prescrite. (Arith. 124 et suiv.)

Si la solidité et la hauteur étant données, on cherche quelle doit être la surface de la base; par exemple, si la solidité est de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, et la hauteur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$, on considérera le diviseur comme étant $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$; et par la même raison que dans le cas précédent, l'opération se réduira à diviser $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$ par $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; mais comme le quotient doit évidemment être une surface, on le comptera, non pas pour des toises linéaires, mais pour des toises carrées, toise-toise-pieds, etc. Du reste, il n'y aura aucune différence dans la maniere de faire l'opération, qui se fera toujours en vertu des regles données (Arith. 124 et suiv.), c'est-à-dire, qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devoit exprimer des toises linéaires, on affectera le signe de chaque partie, de la lettre T. Par exemple, dans le cas présent, on trouveroit pour quotient $5^{T}\ 5^{P}\ 4^{p}\ 6^{l}$; on écrira donc $5^{TT}\ 5^{TP}\ 4^{Tp}\ 6^{Tl}$.

Si la solidité étoit donnée en toises cubes et parties cubes de la toise cube, on la convertiroit en toises cubes, toise-toise-pieds, etc., par ce qui a été dit (259), et l'opération seroit ramenée au cas précédent.

Du Toisé des Bois.

261. Ce qu'on vient de dire du toisé en général ne nous laisse que fort peu de chose à dire sur le toisé des bois.

Dans la marine, on mesure les bois en pieds cubes et parties cubes du pied cube; ainsi il ne s'agit que de mesurer les dimensions en pieds et parties du pied, et les ayant multipliées (après les avoir réduites à la plus petite espece), on réduira en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes, comme il a été dit ci-dessus, mais en s'arrêtant aux pieds cubes.

Dans les bâtiments civils et les fortifications, l'usage est de réduire en solives.

Par *solive*, on entend un parallélipipede de 2 toises de haut sur 6 pouces d'équarrisage, ou 36 pouces carrés de base; ce qui est équivalent à un parallélipipede d'une toise de haut sur un demi-pied carré ou 72 pouces carrés de base, et qui par conséquent contient 3 pieds cubes.

On partage la solive en six parties, chacune d'un pied de haut et de 72 pouces carrés de base; et chacune de ces parties s'appelle *pied de solive*. On partage de même le pied de solive en douze parties d'un pouce de haut et 72 pouces carrés de base chacune, qu'on appelle *pouces de solive*, et ainsi de suite.

Puisque la solive contient 3 pieds cubes, ou la 72[e] partie d'une toise cube, et que ses subdivisions sont les mêmes que celles de la toise cube en toise-toise-pieds, etc., il s'ensuit que le nombre qui exprimeroit un solide quelconque en solives et parties de solive est 72 fois plus grand que celui qui l'exprimeroit en toises cubes, toise-toise-pieds, etc.

Ainsi, pour évaluer la solidité d'un corps en solives, il n'y a qu'à l'évaluer en toises cubes, toise-toise-pieds, etc., et multiplier ensuite le produit par 72. Mais on peut éviter cette multiplication en faisant une réflexion assez simple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimensions comme douze fois plus grande, c'est-à-dire, regarder les lignes comme exprimant des pouces, les pouces comme exprimant des pieds, et ainsi de suite; regarder pareillement une autre des trois dimensions comme six fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pieds; alors multipliant ces deux nouvelles dimen-

sions entre elles, et le produit par la troisieme, on aura tout de suite la solidité en solives, pieds de solive, etc. Par exemple, si l'on a une piece de bois de $8^T\ 5^P\ 6^p$ de long sur $1^P\ 7^p$ de large, et $1^P\ 5^p$ d'épaisseur ; au lieu de $1^P\ 7^p$, je prends $3^T\ 1^P$, c'est-à-dire, douze fois plus, et au lieu de $1^P\ 5^p$, je prends $1^T\ 2^P\ 6^p$, c'est-à-dire, six fois plus ; et multipliant $8^T\ 5^P\ 6^p$ par $3^T\ 1^P$, puis le produit par $1^T\ 2^P\ 6^p$, je trouve $40^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}\ 1^{TTl}$ qu'il faut compter pour $40^{sol}\ 0^P\ 0^p\ 1^l$, dont les pieds, pouces, etc., sont des pieds, pouces, etc. de solive.

Quelques toiseurs divisent autrement la solive. En se la représentant comme un parallélipipede de 2 toises de haut sur 36 pouces carrés de base, ils la divisent en douze parties, qu'ils appellent des pieds; ils divisent ce pied en 12 pouces, et le pouce en trois parties, qu'ils appellent *chevilles*. Ainsi leur pied de solive est la moitié du pied de solive ordinaire; il en est de même du pouce, et chaque cheville vaut 2 lignes de solive.

Pour les bois qu'on reçoit dans l'artillerie, on entend par équarrissage le carré inscrit au cercle qu'on a pris pour base dans un corps d'arbre non équarri ou en grume. Ce carré, qui a pour diagonale le diametre, est (167) la moitié du carré du diametre ou du carré circonscrit. Comme les arbres vont en diminuant de grosseur à mesure qu'on s'éloigne du pied, on les regarde, dans la pratique, comme des cylindres de même longueur que le corps de l'arbre, mais d'un diametre égal à celui de l'arbre vers le milieu de sa hauteur. On diminue encore ce diametre de quelques pouces, par rapport à l'écorce et à l'aubier ; mais cette diminution varie selon la nature des bois et le pays.

Lorsqu'on a mesuré ce diametre, on le rend douze fois plus grand, et on le multiplie par ce même diametre rendu six fois plus grand; la moitié de ce produit, qu'on appelle *base de solive* du bois équarri, exprime, en sous-entendant une toise de longueur, le nombre des solives et parties de solive que contient une toise de longueur de de l'arbre équarri. En sorte que pour avoir le nombre total des solives de cet arbre, il ne s'agit plus que de multiplier par le nombre des toises et parties de toise de sa longueur.

Et pour avoir le nombre des solives du même arbre en *grume*, on multiplie le carré du diametre rendu 72 fois plus grand, comme il vient d'être dit par $\frac{11}{7}$, et on en prend moitié; ce qui donne la surface du

cercle qui sert de base au cylindre dont la solidité est prise pour celle de l'arbre; on appelle cette surface *base de solive du bois en grume.* Enfin on multiplie cette base de solive par le nombre des toises et parties de toise de la longueur de l'arbre.

EXEMPLE.

On demande la base de solive, tant équarrie qu'en grume, pour un arbre de 25 pouces de diametre.

A 25 pouces je substitue 25 pieds, ou.	4^{T} 1^{P}
D'un autre côté, à 25 pouces, je substitue 25 demi-pieds, ou.	2 o 6^{P}
Je multiplie l'un par l'autre, et j'ai.	8^{TT} 4^{TP} 1^{TP}
dont la moitié.	4 2 o 6^{TI}
comptée en solives, donne pour la base de solive équarrie.	4^{sol} 2^{P} o^{P} 6^{l}
Puis, pour avoir la base de solive en grume, je multiplie par $\frac{11}{7}$ la quantité 8^{TT} 4^{TP} 8^{TP}; ce qui donne.	13^{TT} 3^{TP} 10^{TP} 2^{TI}
dont la moitié.	6 4 11 1
comptée en solives, donne pour la base de solive en grume.	6^{sol} 4^{P} 11^{P} 1^{l}

Des Rapports des Solides en général.

262. *Comparer deux solides*, c'est chercher combien de fois le nombre de mesures d'une certaine espece, contenues dans l'un de ces solides, contient le nombre de mesures de même espece contenues dans l'autre.

263. *Deux prismes, ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre, sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur.* Cela est évident, puisque chacun de ces solides est égal au produit de sa base par sa hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure de la base.

Donc *les prismes ou les cylindres, ou les prismes et les cylindres de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases; et les prismes et les cylindres de même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits des bases par les hauteurs ne change point, lorsqu'on y omet

le facteur commun qui s'y trouve, lorsque la base ou la hauteur se trouve être la même dans les deux solides.

Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes, ou une pyramide et un cône, sont dans le rapport des hauteurs, lorsque les bases sont égales;* car ces solides sont chacun le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur (240).

264. *Les solidités des pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou, en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides.*

Car deux pyramides semblables peuvent être représentées par deux pyramides telles que IABCDF, I*abcdf* (fig. 115), puisque ces deux pyramides sont composées d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées. Puis donc que deux pyramides sont en général comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, les bases qui sont ici des figures semblables, étant entre elles comme les carrés des hauteurs IP, I*p* (202), les deux pyramides seront entre elles comme les produits des carrés des hauteurs par les hauteurs mêmes; car on pourra (99) substituer au rapport des bases celui des carrés des hauteurs. Et puisque (213) les hauteurs sont proportionnelles à toutes les autres dimensions homologues, leurs cubes seront donc aussi proportionnels aux cubes de ces dimensions homologues (Arith. 191); donc, en général, deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs dimensions homologues.

265. Donc, *en général, les solidités de deux corps semblables sont entre elles comme les cubes des lignes homologues de ces solides.* Car les solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune; et comme deux quelconques de ces pyramides semblables seront entre elles en même rapport, puisqu'elles sont entre elles comme les cubes de leurs dimensions homologues, lesquelles sont en même rapport que deux autres dimensions homologues quelconques, il s'ensuit

que la somme des pyramides du premier solide sera à la somme des pyramides du second, aussi dans le même rapport des cubes des dimensions homologues.

Donc *les solidités des spheres sont entre elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Donc, en se rappelant tout ce qui a précédé, on voit, 1° que les contours des figures semblables sont dans le rapport simple des lignes homologues; 2° que les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés ou des lignes homologues; 3° que les solidités des corps semblables sont entre elles comme les cubes des lignes homologues.

Ainsi, si deux corps semblables, deux spheres, par exemple, avoient leurs diametres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles seroient aussi dans le rapport de 1 à 3; les surfaces de ces spheres seroient comme 1 à 9, et les solidités comme 1 à 27, c'est-à-dire, que la circonférence d'un des grands cercles de la premiere vaudroit trois fois celle d'un des grands cercles de la seconde; la surface de la premiere vaudroit neuf fois celle de la seconde, et enfin la premiere sphere vaudroit 27 spheres telles que la seconde.

Donc, pour faire un solide semblable à un autre, et dont la solidité soit à celle de celui-ci dans un rapport donné, par exemple, dans celui de 2 à 3, il faut lui donner des dimensions telles, que le cube de l'une quelconque de ces dimensions soit au cube d'une dimension homologue du solide auquel il doit être semblable, comme 2 est à 3. Par exemple, si l'on a une sphere qui ait 8 pouces de diametre, et qu'on demande quel doit être le diametre d'une sphere qui en seroit les deux tiers, il faudra chercher le quatrieme terme de cette proportion, 1 : $\frac{2}{3}$ ou 3 : 2 :: le cube de 8, c'est-à-dire, :: 512 est à un quatrieme terme. Ce quatrieme terme, qui est 341 $\frac{1}{3}$, sera le cube du diametre cherché : c'est pourquoi, tirant la racine cubique (Arith. 159), on aura 6^{p},99 pour ce diametre, c'est-à-dire, 7^{p} à très peu près; ce

qu'on peut vérifier aisément en cette maniere. Cherchons quelles sont les solidités de deux spheres, l'une de 8 pouces, l'autre de 7 pouces de diametre. La circonférence de leur grand cercle se trouvera par ces deux proportions (152),

$$7 : 22 :: 8 :$$
$$7 : 22 :: 7 :$$

Les quatriemes termes sont $25\frac{1}{7}$ et 22 ; multipliant ces circonférences chacune par son diametre, on aura (222) les surfaces de ces spheres, lesquelles seront par conséquent $201\frac{1}{7}$ et 154 ; enfin multipliant ces surfaces par le tiers de leur rayon, c'est-à-dire, respectivement par le sixieme de 8 et de 7, on aura pour les solidités $268\frac{4}{21}$ et $179\frac{2}{3}$, dont le rapport est le même que celui de $\frac{5632}{21} : \frac{539}{3}$, en réduisant en fractions, ou en multipliant les deux termes de la derniere fraction par 7 ; et supprimant le dénominateur commun, le même que de 5632 à 3773 ; or (Arith. 167), le rapport de ces deux quantités est $1\frac{1859}{3773}$, c'est-à-dire, en réduisant en décimales, 1,49 ; et le rapport de 3 à 2 est 1,5 ou 1,50 (Arith. 30) ; la différence n'est donc que d'un centieme ; cette différence vient de ce que le diametre n'est calculé qu'à-peu-près ; d'ailleurs, le rapport de 7 à 22 n'est pas exactement celui du diametre à la circonférence.

Dans les corps composés de la même matiere, les poids sont proportionnels à la quantité de matiere ou à la solidité ; ainsi, connoissant le poids d'un boulet d'un diametre connu, pour trouver celui d'un boulet d'un autre diametre et de la même matiere, il faut faire cette proportion : Le cube du diametre du boulet dont le poids est connu, est au cube du diametre du second, comme le poids du premier est à un quatrieme terme qui sera le poids du second.

Ces principes peuvent servir à résoudre plusieurs questions de la nature des suivantes.

1° *Connoissant le poids d'un pied cube de poudre, trouver le côté d'un fourneau cubique qui doit contenir un poids donné de poudre.*

Les poids de différents volumes d'une même espece de matiere

étant proportionnels à ces volumes, sont proportionnels aux cubes de leurs dimensions, lorsqu'ils sont semblables.

Ainsi, supposant que le pied cube de poudre contienne 64 ℔, si l'on veut avoir le côté d'un fourneau cubique contenant 10 ℔ de poudre, on fera cette proportion, 64 : 10, comme le cube de 1 est à un quatrieme terme qui sera le cube du côté cherché, lequel sera donc $\frac{10}{64}$, dont la racine cubique $\frac{2,154}{4}$, ou $6^p,538$, ou $0^p\ 6^p\ 5^l$ est le côté cherché.

Si dans cette opération on veut employer les logarithmes, au logarithme de 10 on ajoutera (Arith. 242) le complément arithmétique du logarithme de 64; ce qui donne 9,193820, à la caractéristique duquel (Arith. 242) j'ajoute 20; et prenant le tiers de la somme 29,193820, j'ai 9,731273 pour le logarithme de la racine cubique, ou du côté cherché : la caractéristique étant trop forte de dix unités. Je la diminue donc d'autant d'unités qu'il est nécessaire pour trouver le reste dans les tables, et je trouve 5386 pour le nombre qui correspond au logarithme restant 3,731273, dont la caractéristique étant trop forte encore de quatre unités, me fait connoître que le nombre cherché est, à moins d'un dix-millieme près, 0,5386, qui donne, comme ci-dessus, $0^p\ 6^p\ 5^l$.

Dans l'exemple précédent, nous avons pris 64 ℔ pour le poids d'un pied cube de poudre; et ce l'est en effet à-peu-près. Mais dans les charges des fourneaux on ne doit pas compter sur ce pied, à cause de la paille, des sacs à terre, etc. qu'on emploie nécessairement. Mais en supposant qu'on emploie toujours de ces derniers proportionnellement à la quantité de poudre, il suffit de savoir, une fois pour toutes, quel est le poids de la poudre qui entre dans un fourneau d'un pied cubique, pour pouvoir déterminer de la même maniere le côté de tout autre fourneau qui contiendroit un poids connu de poudre, avec les autres matieres qui doivent y entrer.

2° *Connoissant les poids de deux boulets, et le diametre de l'un, pour avoir le diametre de l'autre, on se conduira comme il suit.*

Par exemple, le diametre du boulet de 24 est de $5^p\ 5^l\ 4^{pts}$ ou $5^p,444$; on demande le diametre du boulet de 12.

Les solidités doivent donc être :: 24 : 12 ou :: 2 : 1. Donc les cubes des diametres doivent aussi être :: 2 : 1; ainsi, du triple du logarithme de 5,444, je retranche le logarithme de 2, et j'ai 1,906724, dont le tiers 0,635575, cherché avec une caractéristique plus forte de

2

trois unités, répond à 4321; donc le diametre cherché est de $4^p 321$, ou $4^p\ 3^l\ 10^{pts}$.

Si l'on n'avoit pas de tables de logarithmes, on cuberoit $5^p,444$; et l'ayant divisé par 2, on extrairoit la racine cubique du quotient.

Par les mêmes principes, on peut résoudre les deux questions suivantes; mais le principe donné (246) peut en fournir encore une solution plus facile comme il suit.

Trouver le diametre d'une sphere qui auroit une solidité connue. Par exemple, pour faire une sphere qui contienne 10 pieds cubes de matiere, on fera cette proportion, 11 : 21 :: 10 est à un quatrieme terme, qui sera le cube du diametre cherché; extrayant donc la racine cubique de ce quatrieme terme, on aura le diametre.

Si on opere par logarithmes, on trouvera comme il suit:

Log. 10.	1,000000
Log. 21.	1,322219
Somme.	2,322219
Log. 11.	1,041393
Reste.	1,280826
dont le tiers.	0,426942

étant cherché avec une caractéristique plus forte de trois unités, donne $2^p,673$, ou $2^p\ 8^p\ 0^l\ 11^{pts}$ pour le diametre cherché.

Le même principe peut être employé à *déterminer le diametre des balles de plomb, suivant leur nombre, à la livre.*

Par exemple, sachant que le pied cube de plomb pese 828 ℔, on demande le diametre d'une balle de seize à la livre.

Puisqu'il doit y en avoir seize dans la livre, il y en aura donc seize fois 828, ou 13248 dans un pied cube; la solidité de chacune sera donc la $\frac{1}{13248}$ partie d'un pied cube. Je fais donc cette proportion, 11 : 21 :: $\frac{1}{13248}$ est à un quatrieme terme qui sera le cube du diametre cherché; ou bien, réduisant le pied cube en lignes cubes, je fais cette proportion, 11 : 21 :: $\frac{1728 \times 1728}{16 \times 828}$ est à un quatrieme terme qui sera $\frac{1728 \times 1728 \times 21}{16 \times 828 \times 11}$.

Opérant par logarithmes,

		Log. $\overline{1728}^{2}$	6,475088
Log. 16.	1,204120	Log 21.	1,322219
Log. 828.	2,918030	Somme.	7,797307
Log. 11.	1,041393		5,163543
Somme.	5,163543	Différ. des 2 sommes.	2,633764
		dont le tiers.	0,877921

étant cherché avec une caractéristique plus forte de deux unités seulement, donne $7^{l},55$, ou $7^{l}\,6^{pts}\,\frac{3}{5}$ pour le diametre de chaque balle.

Puisque les surfaces des corps semblables sont entre elles comme les carrés des lignes homologues, les lignes homologues seront donc entre elles comme les racines carrées de ces surfaces ; et les solides qui sont comme les cubes des lignes homologues, seront donc comme les cubes des racines carrées des surfaces. Les surfaces seront donc aussi entre elles comme les carrés des racines cubiques des solidités.

Nous avons vu (162) que dans deux vaisseaux parfaitement semblables, les voilures seroient comme les carrés des hauteurs des mâts, et par conséquent, avons-nous dit, comme les carrés des longueurs des navires, parceque toutes les dimensions homologues des solides semblables sont en même rapport. Or, on voit ici que les poids des solides semblables et de même matiere sont comme les cubes des dimensions homologues ; on voit donc que si deux navires semblables étoient mâtés proportionnellement, les quantités de vent qu'ils pourroient recevoir seroient comme les carrés de leur longueur, tandis que les poids seroient comme les cubes ; et comme la raison des carrés n'est pas la même, et est plus petite que celle des cubes, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, cette seule considération fait voir que la voilure qui seroit propre pour un certain navire, ne le seroit pas pour un navire plus petit, si l'on diminuoit propor-

tionnellement les deux dimensions de cette voilure. Il y a encore d'autres considérations à faire entrer dans l'examen de cette question, qui appartient proprement à la mécanique. Nous ne nous proposons ici que de préparer les esprits à prévoir les usages qu'on peut faire des principes établis jusqu'ici, pour la discussion de ces sortes de questions.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

266. Le mot *trigonométrie* signifie mesure des triangles. Mais on comprend généralement sous ce nom l'art de déterminer les positions et les dimensions des différentes parties de l'étendue, par la connoissance de quelques unes de ces parties.

Si l'on conçoit que les différents points qu'on se représente dans un espace quelconque, soient joints les uns aux autres par des lignes droites, il se présente trois choses à considérer, 1° la longueur de ces lignes; 2° les angles qu'elles forment entre elles; 3° les angles que forment entre eux les plans dans lesquels ces lignes sont ou peuvent être imaginées comprises. C'est de la comparaison de ces trois objets que dépend la solution de toutes les questions qu'on peut proposer sur la mesure de l'étendue et de ses parties; et l'art de déterminer toutes ces choses par la connoissance de quelques unes d'entre elles, se réduit à la résolution de ces deux questions générales.

1° Connoissant trois des six choses, angles et côtés, qui entrent dans un triangle rectiligne, trouver les trois autres, lorsque cela est possible.

2° Connoissant trois des six choses qui composent un triangle sphérique, c'est-à-dire, un triangle formé sur la surface d'une sphere par trois arcs de cercle qui ont tous trois pour centre le centre de cette même sphere, trouver les trois autres, lorsque cela est possible.

La premiere question est l'objet de la trigonométrie qu'on nomme *trigonométrie plane,* parceque les six choses qu'on y considere sont dans un même plan : on la nomme aussi *trigonométrie rectiligne.*

La seconde question appartient à la *trigonométrie sphérique*. Les six choses qu'on y considere sont dans des plans différents, comme nous le verrons par la suite.

De la Trigonométrie plane ou rectiligne.

267. La *trigonométrie plane* est une partie de la géométrie qui enseigne à déterminer ou à calculer trois des six parties d'un triangle rectiligne par la connoissance des trois autres parties, lorsque cela est possible.

Je dis, lorsque cela est possible, parceque si l'on ne connoissoit que les trois angles, par exemple, on ne pourroit pas déterminer les côtés. En effet, si par un point D pris à volonté sur le côté AB du triangle ABC (fig. 140), dont je suppose qu'on connoisse les trois angles, on mene DE parallele à BC, on aura un autre triangle ADE qui aura les mêmes angles que le triangle ABC (37); et on voit qu'on en peut former ainsi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudroit donc que le calcul donnât tout-à-la-fois une infinité de côtés différents.

La question est donc alors absolument indéterminée.

Nous verrons cependant que si l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut du moins déterminer leur rapport.

Mais lorsque parmi les trois choses connues ou données il entrera un côté, on peut toujours déterminer tout le reste. Il y a cependant un cas où il reste quelque chose d'indéterminé : le voici. Supposé que dans le triangle ABC (fig. 141) on connoisse les deux côtés AB et BC, et l'angle A opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer la valeur de l'angle C, ni celle du côté AC, qu'autant qu'on saura si cet angle C est aigu ou obtus; en effet, si l'on conçoit que du point B comme centre, et d'un rayon égal au côté BC, on ait décrit un arc CD, et que du point D, où cet arc rencontre AC, on ait tiré BD, on aura un nouveau triangle ABD, dans lequel on connoîtra les mêmes choses qu'on connoît dans le triangle ABC; savoir, l'angle A, le côté AB,

et le côté BD égal à BC : on a donc ici les mêmes choses pour déterminer l'angle BDA, qu'on avoit dans le triangle ABC pour déterminer l'angle C.

Mais il y a cette différence entre ce cas-ci et le précédent, qu'on peut ici assigner la valeur de l'angle C et de l'angle BDA, comme nous le verrons ci-après : la seule chose qui soit indéterminée, c'est de savoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, et par conséquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choses données, savoir encore si l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reste, on peut remarquer en passant que les deux angles C et BDA dont il s'agit, sont supplément l'un de l'autre; car BDA est supplément de BDC qui est égal à l'angle C, parceque le triangle BDC est isocele.

268. Ce ne sont pas les angles mêmes qu'on emploie dans le calcul des triangles; on substitue aux angles des lignes, qui, sans leur être proportionnelles, sont néanmoins propres à représenter ces angles, et sont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parceque, comme nous le verrons ci-après, elles sont proportionnelles aux côtés des triangles : il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connoître ces lignes, et de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cosécantes.

269. La perpendiculaire AP (fig. 142) abaissée de l'extrémité d'un arc AB sur le rayon BC qui passe par l'autre extrémité B de cet arc, s'appelle le *sinus droit*, ou simplement le *sinus* de l'arc AB ou de l'angle ACB.

La partie BP du rayon, comprise entre le sinus et l'extrémité de l'arc, s'appelle le *sinus-verse*.

La partie BD de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interceptée entre ce rayon BC et le rayon CA prolongé, s'appelle la *tangente* de l'arc AB ou de l'angle ACB.

sachant quel est le nombre de degrés et minutes de cet angle, on trouveroit dans la table quel est le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus AP qui répond à ce nombre de degrés; et alors, en vertu des triangles semblables CAP, CDE, on auroit cette proportion, CA : AP :: CD : DE, par laquelle il seroit facile de calculer DE, puisque les trois premiers termes CA, AP et CD sont connus; savoir, CA et AP par les tables, et CD est donné en pieds.

On voit par là quelles sont ces lignes que nous avons dit ci-dessus (268) pouvoir être substituées aux angles dans le calcul des triangles; ce sont les sinus.

278. Mais les sinus ne sont pas les seules lignes qu'on emploie; on fait usage aussi des tangentes, et même des sécantes. Ces lignes sont faciles à calculer, quand une fois on a calculé tous les sinus; car, comme le triangle CPA et le triangle CBD (fig. 142) sont semblables, on en peut tirer ces deux proportions :

$$CP : PA :: CB : BD$$
$$\text{et } CP : CA :: CB : CD;$$

c'est-à-dire, en faisant attention que CP est égale à AQ,

$$\cos AB : \sin AB :: R : \operatorname{tang} AB$$
$$\text{et } \cos AB : R :: R : \sec AB.$$

Or, on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes sont connus, lorsqu'on connoît tous les sinus, puisque le cosinus d'un arc n'est autre chose que le sinus du complément de cet arc : il sera donc aisé d'en conclure (Arith. 179) la valeur du quatrieme terme de chacune, et par conséquent des tangentes et des sécantes, et par conséquent aussi des cotangentes et des cosécantes, qui ne sont autre chose que des tangentes et des sécantes de complément.

279. Au reste, les deux dernieres proportions que nous venons d'établir ne sont pas seulement utiles pour le calcul des tangentes et des sécantes, elles sont encore d'un grand

2° Que *le sinus-verse* BP *est égal à la différence entre le rayon et le cosinus.*

3° Que *le sinus d'un arc quelconque* AB *est la moitié de la corde* AG, *d'un arc double* ABG. Car le rayon CB étant perpendiculaire sur la corde AG, divise cette corde et son arc en deux parties égales (52).

271. De cette derniere proposition, il suit que *le sinus de* 30° *vaut la moitié du rayon;* car il doit être la moitié de la corde de 60°, ou du côté de l'hexagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

272. *La tangente de* 45° *est égale au rayon.* Car si l'angle ACB est de 45°, comme l'angle CBD est droit, l'angle CDB vaudra aussi 45°; le triangle CBD sera donc isocele, et par conséquent BD sera égal à CB.

273. A mesure que l'arc AB ou l'angle ACB augmente, son sinus AP augmente, et son cosinus AQ ou CP diminue jusqu'à ce que l'arc AB soit devenu de 90°; alors le sinus AP devient FC, c'est-à-dire, égal au rayon, et le cosinus est zéro, parceque le point A tombant en F, la perpendiculaire AQ devient zéro.

A l'égard de la tangente BD et de la cotangente FE, il est visible que la tangente BD augmente continuellement, et que la cotangente au contraire diminue; mais l'une et l'autre, de maniere que quand l'arc AB est devenu de 90°, sa tangente est infinie, et sa cotangente est zéro : en effet, plus l'arc AB devient grand, plus le point D s'éleve au-dessus de BC; et quand le point A est infiniment près de F, les deux lignes CD et BD sont presque paralleles, et ne se rencontrent plus qu'à une distance infinie; donc BD est alors infinie; donc elle l'est quand le point A tombe sur le point F.

274. Ainsi, *pour l'arc de* 90°, *le sinus est égal au rayon, le cosinus est zéro, la tangente est infinie, et la cotangente est zéro.*

Comme le sinus de 90° est le plus grand de tous les sinus, on l'appelle, pour le distinguer des autres, *sinus total*; en

lution des triangles, il ne nous reste plus qu'à parler de leur formation, c'est-à-dire, de la méthode par laquelle on a calculé ou pu calculer les sinus, etc. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers, que les propositions que nous avons à établir sur ce sujet nous serviront ailleurs.

281. *Pour avoir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le carré du sinus, du carré du rayon, et tirer la racine carrée du reste.* Car le cosinus AQ (fig. 142) est égal à PC qui est côté de l'angle droit dans le triangle rectangle APC, dont on connoît alors l'hypothénuse AC et le côté AP (166).

Ainsi, si l'on demandoit le cosinus de 30°; comme nous avons vu (271) que ce sinus est la moitié du rayon que nous supposerons ici de 100000 parties, ce sinus seroit 50000; retranchant son carré 2500000000 du carré 10000000000 du rayon, on a 7500000000, dont la racine carrée 86603 est le cosinus de 30°, ou le sinus de 60°.

282. *Connoissant le sinus d'un arc* AB (fig. 145), *pour avoir celui de sa moitié*, il faut d'abord calculer le cosinus de ce premier arc; ce cosinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le sinus-verse BP : on carrera la valeur de BP, et on ajoutera ce carré avec celui du sinus AP; la somme (166) sera le carré de la corde AB; tirant la racine carrée de cette somme, on aura AB, dont la moitié est le sinus BI de l'arc BD moitié de AB (270).

283. *Connoissant le sinus* BI *d'un arc* BD (fig. 145), *pour trouver le sinus* AP *du double* ADB *de cet arc*, on calculera le cosinus CI de BD, et on fera cette proportion, $R : \cos BD :: 2 \sin BD : \sin ADB$, dans laquelle les trois premiers termes seront alors connus, et dont il sera facile de calculer le quatrieme.

Cette proposition est fondée sur ce que les deux triangles CBI et BAP sont semblables, parceque, outre l'angle droit en P et en I, ils ont d'ailleurs l'angle B commun; ainsi on a $CB : CI :: AB : AP$. Or, CI (270) est le cosinus de BD, et AB le double de BI sinus de BD; AP est le sinus de

ADB, et CB est le rayon; donc R : *cos* BD :: 2 *sin* DB : *sin* ADB.

284. *Connoissant les sinus de deux arcs* AB, AC (fig. 146), *pour trouver le sinus de leur somme ou de leur différence*, il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, et le sinus du second par le cosinus du premier. La somme de ces deux produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la somme des deux arcs; et la différence de ces mêmes produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la différence de ces mêmes arcs.

Faites l'arc AD égal à l'arc AC, tirez la corde CD, le rayon LA qui divisera cette corde en deux parties égales au point I; des points C, A, I et D, abaissez les perpendiculaires CK, AG, IH, DF sur BL; enfin, des points I et D, menez IM et DN paralleles à BL. Puisque CD est divisée en deux parties égales en I, CN sera aussi divisée en deux parties égales en M (102).

Cela posé, CK, qui est le sinus de BC somme des deux arcs, est composé de KM et de MC, ou de IH et de MC; DF, qui est le sinus de BD différence des deux arcs, est égal à KN qui vaut KM moins MN, c'est-à-dire, IH moins CM : ainsi, pour trouver le sinus de la somme, il faut ajouter la valeur de MC à celle de IH, et au contraire l'en retrancher pour avoir le sinus de la différence.

Or, les triangles semblables LAG, LIH donnent LA : LI :: AG : IH, c'est-à-dire, R : *cos* AC :: *sin* AB : IH; donc (Arith. 179) IH vaut $\frac{\sin AB \times \cos AC}{R}$.

Les triangles LAG et CIM semblables, parcequ'en vertu de la construction qu'on a faite ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent (112) LA : LG :: CI : MC, ou R : *cos* AB :: *sin* AC : MC; donc MC vaut $\frac{\sin AC \times \cos AB}{R}$; donc il faut ajouter $\frac{\sin AC \times \cos AB}{R}$ avec $\frac{\sin AB \times \cos AC}{R}$ pour

avoir le sinus de la somme, et l'en retrancher au contraire pour avoir le sinus de la différence.

285. *Pour avoir le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs dont on connoît les sinus*, il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux cosinus l'un par l'autre; multiplier pareillement les deux sinus; alors retranchant le second produit du premier, et divisant le reste par le rayon, on aura le cosinus de la somme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, et on en divisera la somme par le rayon. Car, puisque DC est coupée en deux parties égales en I, FK sera coupée en deux parties égales en H; or LK, qui est le cosinus de la somme, vaut LH moins HK, ou moins IM; et LF, qui est le cosinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK, ou enfin LH plus IM; voyons donc quelles sont les valeurs de LH et de IM.

Les triangles semblables LGA, LHI donnent LA : LI :: LG : LH;

C'est-à-dire, $R : \cos AC :: \cos AB : LH$;

Donc LH vaut $\frac{\cos AC \times \cos AB}{R}$.

Les triangles semblables LAG, CIM donnent LA : AG :: CI : IM;

C'est-à-dire, $R : \sin AB :: \sin AC : IM$;

Donc IM vaut $\frac{\sin AB \times \sin AC}{R}$.

Il faut donc, pour avoir le cosinus de la somme, retrancher $\frac{\sin AB \times \sin AC}{R}$ de $\frac{\cos AB \times \cos AC}{R}$; et au contraire l'ajouter, pour avoir le cosinus de la différence.

286. *La somme des sinus de deux arcs* AB, AC (fig. 147) *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la tangente de la moitié de leur différence;* c'est-à-dire, que $\sin AB + \sin AC : \sin AB - \sin AC :: \tang \frac{AB + AC}{2} : \tang \frac{AB - AC}{2}$.

Après avoir tiré le diametre AM, portez l'arc AB de A en D, tirez la corde BD qui sera perpendiculaire sur AM. Par le point C, tirez CP perpendiculaire, et CF parallele à AM. Du point F, menez les cordes FB et FD, et d'un rayon FG égal à celui du cercle BAD, décrivez l'arc IGK rencontrant CF en G, et en ce point G, élevez HL perpendiculaire à CF; les lignes GH et GL sont les tangentes des angles GFH et GFL, ou CFB et CFD, qui, ayant leurs sommets à la circonférence, ont pour mesure la moitié des arcs CB, CD sur lesquels ils s'appuient (63), c'est-à-dire, la moitié de la différence BC, et la moitié de la somme CD des deux arcs AB, AC; ainsi GL et GH sont les tangentes de la moitié de la somme, et de la moitié de la différence de ces mêmes arcs.

Cela posé, il est visible que DS étant égal à BS, la ligne DE vaut BS + SE ou BS + CP, c'est-à-dire, la somme des sinus des arcs AB, AC; pareillement, BE vaut BS — SE ou BS — CP, c'est-à-dire, la différence des sinus de ces mêmes arcs. Or, à cause des paralleles BD, HL, on a (115) DE . BE :: LG : GH;

Donc $\sin AB + \sin AC : \sin AB - \sin AC :: \operatorname{tang} \frac{AB + AC}{2} : \operatorname{tang} \frac{AB - AC}{2}$.

287. Donc *la somme des cosinus de deux arcs est à la différence de ces cosinus, comme la cotangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car les cosinus n'étant autre chose que des sinus de complément, il suit de la proposition précédente que la somme des cosinus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des compléments est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes compléments : or, la moitié de la somme des compléments de deux arcs est le complément de la moitié de la somme de ces deux arcs; et

la demi-différence des compléments est la même que la demi-différence des arcs; donc, etc.

288. Les trois principes posés (271, 282 et 284) suffisent pour concevoir comment on pourroit s'y prendre pour former une table des sinus. En effet, on connoît le sinus de 30° par ce qui a été dit (271); et par ce qui a été dit (282), on peut trouver celui de 15°, et successivement ceux de 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″, 0° 56′ 15″, 0° 28′ 7″ 30‴, 0° 14′ 3″ 45‴, 0° 7′ 1″ 52‴ 30ⁱᵛ.

Cela posé, on remarquera que quand les arcs sont fort petits, ils ne different pas sensiblement de leurs sinus, et sont par conséquent proportionnels à ces sinus; ainsi, pour trouver le sinus de 1′, on fera cette proportion : *L'arc de* 0° 7′ 1″ 52‴ 30ⁱᵛ *est à l'arc de* 0° 1′, *comme le sinus de ce premier arc est au sinus de* 1′.

Si dans ce calcul on suppose le rayon de 100000 parties seulement, il faudra calculer les sinus des arcs que nous venons de rapporter, avec trois décimales, pour être en droit d'en conclure les suivants à moins d'une unité près; alors on remontera facilement aux autres en cette maniere.

Depuis 1′ jusqu'à 3° 0′, il suffira de multiplier le sinus de 1′ successivement par 2, 3, 4, 5, etc., pour avoir les sinus de 2′, 3′, etc., jusqu'à 3°, à moins d'une unité près.

Pour calculer les sinus des arcs au-dessus de 3° 0′, on fera usage de ce qui a été dit (284); mais on abrégera considérablement le travail en ne calculant ces sinus, par ce principe, que de degrés en degrés seulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y satisfera en prenant la différence des sinus de deux degrés consécutifs; et formant cette proportion : 60 *minutes sont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des sinus des deux degrés voisins est à un quatrieme terme*, qui sera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux sinus pour avoir le sinus du nombre de degrés et minutes dont il s'agit. Par exemple, si, après avoir trouvé que les sinus de 8° et de 9° sont 13917 et 15643, je voulois avoir le sinus de 8° 17′, je prendrois la différence 1726

ces sinus, et je calculerois le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers sont $60' : 17' :: 1726 :$

Ce quatrieme terme, qui est 489 à très peu près, étant ajouté à 13917, donne 14406 pour le sinus de $8^\circ 17'$, tel qu'il est dans les tables, à moins d'une unité près.

La raison de cette pratique est fondée sur ce que lorsque l'arc KL (fig. 129) est petit, comme de 1°, par exemple, les différences LM, Iu des sinus LF, IH sont à-peu-près proportionnelles aux différences KL, KI des arcs correspondants AL, AI, parceque les triangles KML, KuI, pouvant être considérés comme rectilignes, sont semblables.

289. Cette méthode ne doit cependant être employée que jusqu'à 87°, parceque, passé ce terme, on ne peut se permettre de prendre iu (fig. 148) pour la différence des sinus PB, Qx, parceque la quantité ux, toute petite qu'elle est, a un rapport sensible avec iu, et d'autant plus sensible que l'arc AB approche plus de 90°. Dans ce cas, il faut se rappeler que (170) les lignes DE, Dt, qui sont les différences entre le rayon et les sinus PB, Qx, sont proportionnelles aux carrés des cordes DB et Dx, ou, à cause que les arcs DB et Dx sont fort petits, aux carrés des arcs DB et Dx; c'est pourquoi, ayant calculé le sinus de 87°, on prendra sa différence avec le rayon 100000; et pour trouver le sinus de tout autre arc entre 87° et 90°, on fera cette proportion : Le carré de 3° ou de $180'$ est au carré du nombre des minutes du complément de l'arc en question, comme la différence du rayon au sinus de 87° est à un quatrieme terme qui sera Dt, et qui, étant retranché du rayon, donnera Ct ou Qx sinus de l'arc en question. Par exemple, ayant trouvé que le sinus de 87° est 99863, si je veux avoir le sinus de $88^\circ 24'$, dont le complément est $1^\circ 36'$ ou $96'$, je ferai cette proportion : $\overline{180'}^2 : \overline{96'}^2 :: 137 : Dt$, par laquelle je trouve que Dt vaut 39, à très peu de chose près; retranchant 39 du rayon 100000, j'ai 99961 pour le sinus de $88^\circ 24'$, [illegible] il est en effet dans les tables.

290. Ayant calculé ainsi les sinus, on aura facilement les tangentes et les sécantes, par ce qui a été dit (278).

291. Les sinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant observer que si l'on prenoit dans les tables la valeur numérique d'un des sinus, pour calculer son logarithme selon ce qui a été dit (Arith. 239), on ne trouveroit pas ce logarithme absolument le même qu'il est dans la colonne des logarithmes des sinus; la raison en est que les sinus des tables ont été calculés originairement, dans la supposition que le rayon étoit de 10000000000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle précision, on a supprimé dans les tables actuelles, les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc.; en sorte que ces valeurs, telles qu'elles sont actuellement dans les tables, ne sont approchées qu'à environ une unité près sur 100000. Il n'en a pas été de même des logarithmes des sinus, tangentes, etc.; on les a conservés tels qu'ils ont été calculés pour le rayon supposé de 10000000000 parties; et c'est pour cette raison qu'on leur trouve une caractéristique beaucoup plus forte que ne semble le supposer la valeur numérique du sinus correspondant, ou de la tangente correspondante; en sorte que lorsqu'on fait usage des logarithmes des sinus, tangentes, etc., on calcule dans la supposition tacite que le rayon soit de 10000000000 parties; et lorsqu'on fait usage des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc., on calcule dans la supposition que le rayon soit de 100000 parties seulement.

A l'égard des logarithmes des tangentes et sécantes, on les a par une simple addition et une soustraction, lorsqu'une fois on a ceux des sinus; cela est évident, d'après ce qui a été dit (278), et (Arith. 232).

* 292. Quoique les tables ordinaires ne donnent les sinus que pour les degrés et minutes, néanmoins on peut en déduire les valeurs de ces mêmes lignes pour les degrés, minutes et secondes, et cela en suivant exactement ce que nous venons de prescrire pour les degrés

et minutes seulement. Mais comme on emploie plus souvent les logarithmes de ces lignes au lieu de ces lignes elles-mêmes, nous nous arrêterons un moment sur ce dernier objet.

Supposant qu'on ait les logarithmes des sinus et des tangentes, de minute en minute; quand on voudra avoir le logarithme du sinus d'un certain nombre de degrés, minutes et secondes, on prendra dans les tables celui du sinus du nombre des dégrés et minutes : on prendra aussi la différence des deux logarithmes voisins qui est à côté, et on fera cette proportion : 60" sont au nombre des secondes en question, comme la différence des logarithmes, prise dans les tables, est à un quatrieme terme qu'on ajoutera au logarithme du sinus des degrés et minutes.

Si au contraire on avoit un logarithme de sinus qui ne répondît pas à un nombre exact de degrés et minutes, pour avoir les secondes, on feroit cette proportion : La différence des deux logarithmes, entre lesquels tombe le logarithme donné, est à la différence entre ce même logarithme, et celui qui est immédiatement plus petit dans la table, comme 60" sont à un quatrieme terme, qui seroit le nombre de secondes à ajouter au nombre de degrés et minutes de l'arc qui, dans la table, est immédiatement au-dessous de celui que l'on cherche.

On pourra suivre cette regle, tant que l'arc ne sera pas au-dessous de 3°; lorsqu'il sera au-dessous, on se conduira comme dans cet exemple; supposons qu'on demande le sinus de 1° 55' 48", on feroit cette proportion : 1° 55' : 1° 55' 48" :: le sinus de 1° 55' est à un quatrieme terme, qui, à cause que les petits arcs sont proportionnels à leurs sinus, sera, sans erreur sensible, le sinus de 1° 55' 48". Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en secondes; et alors, prenant dans les tables le logarithme du sinus de 1° 55 qui est le troisieme terme, on lui ajoutera le logarithme de 1° 55' 48" réduits en secondes : enfin du total on retranchera le logarithme de 1° 55' réduits en secondes, le reste (Arith. 232) sera le logarithme du quatrieme terme, c'est-à-dire, le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc au-dessous de 3°, et dont on a le sinus, on chercheroit d'abord dans les tables quel est le nombre de degrés et minutes; puis on feroit cette proportion : Le sinus du nombre de degrés et minutes trouvés est au sinus proposé, comme ce même nombre de degrés et minutes réduits en secondes est au nombre total de secondes de l'arc cherché. Ainsi, par logarithmes, l'opération se réduira à

prendre la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus du nombre de degrés et minutes immédiatement au-dessous, et à ajouter ce logarithme au logarithme de ce nombre de degrés et minutes réduits en secondes ; la somme sera le logarithme du nombre de secondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, si l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du sinus d'un arc, je trouve dans les tables que le nombre de degrés et minutes le plus approchant est 2° 24'', et que la différence entre le logarithme du sinus proposé et celui du sinus de ce dernier arc est 0,0013811 ; j'ajoute cette différence avec 3,9365137, logarithme de 2° 24'' réduits en secondes ; la somme 3,9378948 répond, dans les tables de logarithmes, à 8667 ; c'est le nombre de secondes de l'arc cherché, qui, par conséquent, est de 2° 24' 27''. Cette regle est l'inverse de la précédente.

A l'égard des logarithmes des tangentes, on suivra les mêmes regles, en changeant le mot de *sinus* en celui de *tangente*. Il faut seulement en excepter les arcs qui sont entre 87° et 90°, pour lesquels on suivra celle-ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément, par la regle qu'on vient de prescrire pour les tangentes, et retranchez ce logarithme du double du logarithme du rayon. En effet, selon ce qui a été dit (280), la tangente est le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers sont la cotangente, le rayon et le rayon; et si, au contraire, on avoit le logarithme de la tangente d'un arc qui, devant être entre 87° et 90°, devroit avoir des secondes, on retrancheroit ce logarithme du double du logarithme du rayon, et on auroit la tangente du complément, qui, étant nécessairement entre 0° et 3°, se détermineroit facilement d'après ce qui précede; prenant le complément de l'arc ainsi trouvé, on auroit l'arc cherché.

293. Puisque le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double, si l'on descendoit par le principe donné (282) jusqu'au sinus de l'arc le plus approchant de 1'', et qu'en doublant ce sinus on répétât ce double autant de fois que l'arc dont il est la corde est contenu dans la demi-circonférence, il est visible qu'on auroit un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence, mais plus petit ; et si par la proportion donnée (278) on calculoit la tangente du même arc, et que l'ayant doublée on répétât ce double autant de fois que le double de cet arc est contenu *dans* la demi-circonférence, on trouveroit un nombre fort

approchant de la demi-circonférence, mais plus grand : on peut donc, par le calcul des sinus, approcher du rapport du diametre à la circonférence : nous ne nous arrèterons pas à ce calcul, parceque nous donnerons ailleurs une méthode plus expéditive. Quoi qu'il en soit, on trouveroit, par cette méthode, que le rayon étant supposé de 10000000000, la demi-circonférence seroit entre 31415926536 et 31415926535. Concluons donc de là que le rayon étant 1, les 180° de la circonférence valent 3,1415926535; le degré vaut 0,0174532952; la minute vaut 0,000290888208, et ainsi de suite. Nous rapportons ici ces nombres, parcequ'ils peuvent souvent être utiles. Par exemple, veut-on savoir quel espace occuperoit une minute de degré sur l'octant avec lequel on observe les hauteurs à la mer, cet octant étant supposé de 20 pouces de rayon ? Par la construction de cet instrument, les 90° sont représentés par un arc de 45; ainsi l'intervalle entre deux divisions consécutives est celui qu'occuperoit un degré dans un cercle dont le rayon seroit moitié moindre, ou de 10 pouces; donc la minute, sur un pareil instrument, ne répond qu'à l'espace qu'elle occuperoit sur une circonférence de 10 pouces, ou 120 lignes. Multiplions donc 120 par 0,00029, valeur de la minute; en se bornant aux cinq premiers chiffres, nous aurons 0,03480 ou 0,0348, c'est-à-dire, $\frac{348}{10000}$ de ligne ou $\frac{1}{29}$ de ligne à peu-près. On voit par là qu'on ne peut guere répondre d'une minute, en observant avec cet instrument. Nous aurons occasion d'en parler ailleurs.

Avant que d'enseigner l'usage des principes précédents pour la résolution des triangles, il est à propos de faire connoître comment on mesure les angles qui font partie de ces triangles.

L'instrument qu'on emploie lorsqu'on veut mesurer les angles avec une précision suffisante pour la plupart des pratiques, est le *graphometre* (fig. 9).

C'est un demi-cercle de cuivre divisé en 180ᵈ, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diametre.

La demi-circonférence D H B, sur laquelle les divisions sont marquées, n'est *pas une simple ligne*; c'est une couronne demi-circulaire

à laquelle l'ouvrier donne plus ou moins de largeur; et cette couronne est ce qu'on appelle le *limbe* de l'instrument.

Le diametre DB fait corps avec l'instrument; mais le diametre EC, qu'on nomme *alidade*, n'y est assujetti que par le centre A, autour duquel il peut tourner et parcourir, par son extrémité C, toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diametres est garni à ses deux extrémités, de *pinnules*, à travers lesquelles on regarde les objets. Quelquefois, au lieu de pinnules, chacun de ces deux diametres porte une lunette. Celle qui répond au diametre BD est parallele à ce diametre. L'autre, fixée à l'alidade EC, peut se mouvoir avec elle, et s'incliner un peu sur elle, afin de n'être pas obligé de déranger le plan de l'instrument pour appercevoir les objets qui seroient un peu élevés ou abaissés à l'égard de ce plan.

L'instrument est porté sur un pied, et peut, sans rien changer à la position du pied, être incliné dans tous les sens, selon le besoin.

Pour rendre le graphometre propre à mesurer les angles avec plus de précision, à indiquer les parties de degré, on fait le plus souvent, sur la largeur et à l'extrémité du diametre mobile, des divisions qui, selon la maniere dont elles correspondent à celles du limbe, servent à connoître les parties de degré, de 5 en 5 minutes, ou de 4 en 4 minutes, etc.

Pour les faire marquer de 5' en 5', par exemple, on prend sur la largeur et à l'extrémité de l'alidade une étendue de 11 degrés, et on la divise en douze parties égales, dont chacune est par conséquent de 55'. Lorsque la premiere division de l'alidade correspond à l'une des divisions du limbe, alors l'angle compris entre les deux diametres est mesuré par les divisions du limbe. Mais lorsque la premiere division de l'alidade ne s'accorde pas avec une des divisions du limbe, alors on cherche sur l'une et sur l'autre quelle est la division qui approche le plus de se correspondre, et l'on ajoute au nombre de degrés marqués sur le limbe entre la premiere division de celui-ci et celle de l'alidade, autant de fois 5 minutes qu'il y a d'intervalles sur l'alidade entre sa premiere division et celle qui a sa correspondance sur le limbe, parceque pour chaque intervalle il y a 5 minutes de différence entre le limbe et l'alidade.

Si on vouloit évaluer les minutes de 4 en 4, on prendroit un arc de 14 degrés que l'on diviseroit en quinze parties; et pour évaluer de 3 en 3, on prendroit 19 degrés que l'on diviseroit en vingt parties.

Pour mesurer un angle avec cet instrument, par exemple, pour

nesurer l'angle que formeroient au point A (fig. 9) les lignes qu'on magineroit tirées de ce point aux deux objets G et F, on place le centre du graphometre en A, et on dispose l'instrument de maniere que, regardant à travers les pinnules du diametre fixe BD, l'on appercoive l'un F de ces objets, et qu'en même temps l'autre objet G se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphometre : alors on fait mouvoir l'alidade EC jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir l'objet G à travers les pinnules E et C; l'arc BC compris entre les deux diametres est la mesure de l'angle GAF.

Lorsqu'on veut employer le graphometre à mesurer des angles dans un plan vertical, c'est-à-dire, des angles formés dans un plan qui passe par ce qu'on appelle une ligne *à-plomb*, on donne au plan de l'instrument la position verticale, à l'aide d'un poids suspendu par un fil dont on attache une extrémité au centre du graphometre. Lorsque le fil rase le bord de l'instrument, et répond à 90^d, le graphometre a la disposition convenable.

De la Résolution des Triangles rectangles.

294. Nous avons dit ci-dessus (267) que pour être en état de calculer ou de résoudre un triangle, il falloit connoître trois des six parties qui le composent, et que parmi les trois choses connues il falloit qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit est un angle connu, il suffit donc, dans les triangles rectangles, de connoître deux choses différentes de l'angle droit; mais il faut qu'une au moins de ces deux choses soit un côté. Il faut encore remarquer que comme les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit, dès que l'un des deux est connu, l'autre l'est aussi.

La résolution des triangles rectangles se réduit à quatre cas; ou les deux choses connues sont un des deux angles aigus, et un côté de l'angle droit, ou elles sont un angle aigu et l'hypothénuse, ou un côté de l'angle droit et l'hypothénuse, ou enfin les deux côtés de l'angle droit.

Ces quatre cas trouveront toujours leur résolution dans l'une des deux *proportions* ou analogies suivantes.

295. 1° *Le rayon des tables est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle aigu.*

296. 2° *Le rayon des tables est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé à ce même angle.*

Pour démontrer la premiere de ces deux analogies, il n'y a qu'à se représenter (fig. 144) que dans le triangle rectangle CED, la partie CA de l'hypothénuse soit le rayon des tables; alors, en imaginant l'arc AB, la perpendiculaire AP sera le sinus de l'angle ACB ou DCE : or, à cause des paralleles AP et DE, on aura, dans les triangles semblables CAP, CDE, CA : AP :: CD : DE, c'est-à-dire, R : *sin* DCE :: CD : DE, ce qui est précisément la premiere analogie.

On prouvera de même que R : *sin* CDE :: CD : CE.

Pour la seconde, il faut se représenter dans le triangle rectangle CEF (fig. 149), que la partie CA du côté CE soit le rayon des tables; et ayant imaginé l'arc AB, la perpendiculaire AD, élevée sur AC au point A, sera la tangente de l'angle C ou FCE; alors, à cause des triangles semblables CAD, CEF, on aura CA : AD :: CE : EF, c'est-à-dire, R : *tang* FCE :: CE : EF, ce qui fait la seconde des deux analogies énoncées ci-dessus.

On prouvera de la même maniere que R : *tang* CFE :: EF : CE.

297. Dans les applications qui vont suivre, nous emploierons toujours les logarithmes des sinus, tangentes, etc., au lieu des sinus, tangentes, etc.; et pour familiariser les commençants avec l'usage des compléments arithmétiques, nous en ferons usage dans tous les calculs, à l'exception des cas où le logarithme à retrancher seroit celui du rayon dont la caractéristique étant 10, la soustraction est très facile. Mais pour ne point obliger ceux qui n'auroient que la premiere édition de l'Arithmétique, de recourir à la seconde, nous allons exposer ici en peu de mots l'idée et l'usage des compléments arithmétiques.

Le complément arithmétique d'un nombre se prend en retranchant de 9 chacun des chiffres de ce nombre, excepté le dernier sur la droite, qu'on retranche de 10. Ainsi le complément arithmétique d'un nombre peut se prendre à l'inspection de ses chiffres, sans aucune autre opération.

Les compléments arithmétiques servent à changer les soustractions en additions. Ainsi, si de 78549 je veux retrancher 65647, je puis à cette opération substituer l'addition de 78549 avec 34353, qui est le complément arithmétique de 65647 ; alors il ne s'agit plus que d'ôter une unité au premier chiffre de la gauche de la somme : on ôteroit deux unités, si l'on avoit ajouté deux compléments arithmétiques, et ainsi de suite. Dans le cas présent, la somme seroit 112902, de laquelle supprimant une unité au premier chiffre, il reste 12902, qui est précisément ce que l'on auroit eu, si de 78549 on avoit retranché 65647, selon la regle ordinaire.

La raison est facile à appercevoir, en observant que le complément arithmétique de 65647 n'est autre chose que 100000 moins 65647; ainsi, quand on ajoute le complément arithmétique, on ajoute 100000, et on retranche 65647 ; le résultat renferme donc 100000 de trop, c'est-à-dire, que son premier chiffre est trop fort d'une unité.

Donc, puisque (Arith. 232) pour faire une regle de *trois* par logarithmes, il faut ajouter les logarithmes des deux moyens, et retrancher le logarithme du premier terme, on pourra, en vertu de l'observation précédente, faire une somme des logarithmes des deux moyens, et du complément arithmétique du logarithme du premier terme; et l'on diminuera d'une unité le premier chiffre de la droite du résultat.

Après ces observations, venons à l'application des deux analogies démontrées ci-dessus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

Exemple I. Supposons qu'il s'agit de déterminer la hauteur AC d'un édifice (fig. 150) par des mesures prises sur le terrein.

On s'éloignera de *cet édifice* à une distance CD, telle que

l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point D au pied et au sommet de l'édifice, ne soit ni trop aigu ni fort approchant de 90°; et ayant mesuré cette distance CD, on fixera au point D le pied d'un graphometre. On disposera cet instrument de maniere que son plan soit vertical et dirigé vers l'axe AC de la tour, et que son diametre fixe HF soit horizontal, ce qui se fera à l'aide d'un petit poids suspendu par un fil attaché au centre. Ce fil doit alors raser le bord de l'instrument, et répondre à 90°. On fera mouvoir le diametre mobile jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir à travers les pinnules ou la lunette dont il est garni, le sommet A de l'édifice. Alors on observera sur l'instrument le nombre des degrés de l'angle FEG, qui est aussi celui de son opposé au sommet AEB.

Cela posé, la hauteur AC de l'édifice étant perpendiculaire à l'horizon, est perpendiculaire à BE; c'est pourquoi on a un triangle rectangle ABE, dans lequel, outre l'angle droit, on connoît BE égal à CD qu'on a mesuré, et l'angle AEB; on cherche la valeur de AB; on voit donc que les trois choses connues, et celle que l'on cherche, sont les termes de l'analogie du n° 296; donc, pour trouver AB, on fera cette proportion : R : *tang* AEB : BE : AB.

Supposons, par exemple, que la distance CD ou BE ait été trouvée de 132 pieds, et l'angle AEB de 48° 54′.

On aura R : *tang* 48° 54′ :: 132ᵖ : AB; de sorte que prenant dans les tables la valeur de la tangente de 48° 54′, la multipliant par 132, et divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les tables, on aura le nombre de pieds de AB, auquel ajoutant la hauteur ED de l'instrument, on aura la hauteur cherchée AC.

Mais on peut abréger considérablement le calcul, en employant, au lieu de ces nombres, leurs logarithmes, parce-qu'alors il ne s'agit plus (Arith. 232) que d'ajouter les logarithmes du second et du troisieme termes, et de retrancher le logarithme du premier; c'est pourquoi on fera le calcul comme il suit:

Log tang 48° 54′.	10,0593064
Log 132.	2,1205739
Somme.	12,1798803
Log du rayon.	10,0000000
Reste ou *log* de AB.	2,1798803

qui répond dans les tables à 151,32, à moins d'un centieme près. Ainsi A B est de 151^p et 32 centiemes, ou $151^p\ 3^p\ 10^l$.

Remarquons en passant que le logarithme du rayon ayant 10 pour caractéristique, et des zéros pour ses autres chiffres, on peut, lorsqu'il s'agit de l'ajouter ou de le retrancher, se dispenser de l'écrire, et se contenter d'ajouter ou d'ôter une unité aux dixaines de la caractéristique du logarithme auquel il doit être ajouté, ou dont il doit être retranché.

BDC (fig. 211) *est l'arrondissement de la contrescarpe, compris ntre les prolongements égaux* A B, A C *des deux faces d'un bastion; n demande la corde* B C, *et la fleche* D E *de cet arrondissement, en upposant connus* A B, A C, *et l'angle* B A C *égal à l'angle flanqué du astion.*

Soient AB et AC, chacun de 20^T ou 120^P, et l'angle BAC de $83^d\ 8'$. Dans le triangle B E A, rectangle en E, on aura (295),

1° R : *sin* B A E :: A B : B E;
2° R′ : *sin* A B E ou *cos* B A E :: A B : A E.

Donc, 1° *Log* A B, ou *log* 120^P.	2,0791812
Log sin B A E, ou *log sin* $41^d\ 34'$. . . .	9,8218351
Somme — *log* du rayon.	~~1~~1,9010163

qui, dans les tables, répond à 79^P,62; donc la corde BC est de 159^P,24.

2° *Log* 120^d.	2,0791812
Log cos $41^d\ 34'$.	9,8740085
Somme — *log* du rayon.	~~1~~1,9531897

qui répond à 89^P,78; donc la fleche D E ou AD — AE est de 30^P,23.

Par la même méthode que nous venons d'employer pour détermi-

A B est de 1500 pieds, et le côté A C est déterminé par la grandeur, la distance et le nombre des embrasures.

Supposons, par exemple, qu'il y ait 20 pieds de distance du milieu d'une embrasure au milieu de sa voisine; alors on fera cette proportion, 120 : 1500 :: R : *tang* BCA. Donc, par logarithmes,

Log 1500.	3,1760913
Log du rayon.	10,0000000
Complément arithmétique *log* 120.	7,9208188
Somme.	11,0969101

C'est le logarithme de la tangente de l'angle BCA, qui est donc de 85^{d} 26'.

Comme le heurtoir D F doit toujours être perpendiculaire à la ligne du tir, et qu'il doit être appuyé contre l'épaulement au moins par une de ses extrémités, il fait donc avec l'épaulement un angle A D F, qui est le complément de celui D C E ou A C B que nous venons de déterminer : ainsi, connoissant la longueur D F du heurtoir, et par conséquent sa moitié D E, il sera facile de calculer la distance C E de l'épaulement, à laquelle doit être placé, sur la ligne de tir, le milieu E du heurtoir.

Exemple II. On a couru, en partant d'un point connu A (fig. 151), 32 lieues sur la ligne A B parallele à la ligne G F qui marque le nord-nord-est : on demande combien on a avancé vers l'est, et de combien vers le nord.

On imaginera par les deux points A et B les deux lignes A C et B C paralleles, la premiere à la ligne nord et sud N S, et la seconde à la ligne est et ouest E O; comme ces deux lignes font un angle droit, le triangle A C B sera rectangle en C; on connoît, dans ce triangle, le côté A B qui est de 32 lieues, et l'angle C A B qui, à cause des paralleles, est égal à l'angle N D F, lequel, à cause que D F marque le nord-nord-est, est de 22° 30' ou le quart de 90°.

On fera donc, pour trouver B C, cette analogie (285), R : *sin* 22° 30' :: 32 : B C.

Et pour trouver A C, on remarquera que l'angle B est complément de l'angle A : c'est pourquoi on fera cette analogie (295), R : *sin* 67° 30' :: 32 : A C.

Si par le point H (fig. 194), le plus élevé du renflement du boulet, on imagine la droite HI parallele à l'axe AB, l'angle GHI sera égal à l'angle GCA que la ligne de mire fait avec l'axe prolongé. Connoissant donc dans le triangle rectangle GIH le côté GI et le côté HI, il sera facile d'avoir l'angle GHI par cette proportion (296), IH : GI :: R : *tang* GHI.

Par exemple, dans la piece de 12 légere, on a AG de	6^po, 231
BH.	4, 926
et par conséquent GI.	1, 305
d'ailleurs HI.	77, 254

On aura donc 77,254 : 1,305 ou 77254 : 1305 :: R : *tang* GHI; donc, par logarithmes,

Log 1305.	3,1156105
Log du rayon.	10,0000000
Complément arithmétique *log* 77254.	5,1120790
Somme.	18,2279895

C'est le logarithme de la tangente de l'angle cherché, lequel sera par consequent de $0^d\ 58'$.

Une piece de 12 *légere étant pointée à* 3 *degrés, trouver la hauteur à laquelle la ligne de mire s'éleve à la distance de* 600 *toises, qui est à-peu-près la portée de cette piece sous l'angle de* 3 *degrés.*

La ligne de mire faisant avec l'axe un angle de 58', ainsi qu'on vient de le voir, ne fera donc avec l'horizon qu'un angle de $2^d\ 2'$; ainsi sa hauteur, à la distance horizontale de 600 toises, sera le second côté de l'angle droit dans un triangle rectangle dont l'angle adjacent au premier côté 600 toises est de $2^d\ 2'$. On aura donc ce côté (296) par la proportion R : *tang* $2^d\ 2'$ :: 600^T est à un quatrieme terme que l'on trouvera de $21^T,3$.

La premiere embrasure d'une batterie AC *à ricochet* (fig. 204) *étant directe, trouver l'inclinaison de la septieme embrasure, c'est-à-dire, l'angle que la ligne de tir fait avec l'épaulement* AC *à la septieme embrasure; on suppose que toutes les pieces de cette batterie sont dirigées vers un même point* B *éloigné de* 250 *toises ou* 1500 *pieds.*

La ligne AB de tir de la premiere embrasure est supposée perpendiculaire à l'épaulement AC; ainsi la question est de déterminer l'angle BCA du triangle rectangle BAC, dont l'angle A est droit; le côté

C'est-à-dire, R : *sin* B :: 42 : 35; ou bien, en écrivant le second rapport à la place du premier, 42 : 35 :: R : *sin* B.

Faisant l'opération par logarithmes, on a :

Log 35.	1,5440680
Log du rayon.	10 . . . . .
Complément arithmétique du *log* de 42.	8,3767507
Somme ou *log* du sinus de B.	19,9208187

qui, dans les tables, répond à 56° 27'; donc l'angle A, ou l'aire de vent, est de 33° 33'.

Exemple IV. On a couru selon la ligne AB, dont la position et la grandeur sont inconnues; mais on sait qu'on a avancé de 15 lieues à l'est, et de 35 lieues au nord : on demande la direction et la longueur de la route.

On connoît donc ici les deux côtés AC et BC de l'angle droit, et l'on demande les angles et l'hypothénuse. Pour trouver l'angle A, on fera cette analogie (296), AC : BC :: R : *tang* A; c'est-à-dire, 35 : 15 :: R : *tang* A.

Et faisant l'opération par logarithmes,

Log 15.	1,1760913
Log du rayon.	10 . . . . .
Complément arithmétique du *log* de 35.	8,4559320
Somme ou *log tang* A.	19,6320233

qui, dans la table, répond à 23° 12'.

Pour avoir AB, on peut, quand on a déterminé l'angle A, se conduire comme dans l'exemple III. Mais il n'est pas nécessaire de calculer l'angle A; la proposition démontrée (164 et 166) suffit : ainsi prenant le carré de 15 qui est 225, et l'ajoutant au carré de 35 qui est 1225, on aura 1450 pour le carré de AB; et tirant la racine carrée, on aura 38,08 pour la valeur de AB, à moins d'un centieme près.

Par la même raison, si l'hypothenuse AB et l'un AC des côtés de l'angle droit étant donnés, on demandoit l'autre côté BC, il ne seroit pas nécessaire de calculer l'angle A;

on retrancheroit (166) le carré du côté connu AC, du carré de l'hypothénuse AB; la racine carrée du reste seroit la valeur du côté BC.

C'est encore par la résolution des triangles rectangles qu'on peut déterminer de combien il s'en faut que le rayon AD (*fig.* 152), par lequel on vise à l'horizon de la mer lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité AB au-dessus d'un point B de sa surface, ne soit parallele à la surface de la mer.

Comme le rayon visuel AD est alors une tangente, si l'on imagine le rayon CD, l'angle D sera droit (48): or, on connoît le rayon CD de la terre, qui est 19611500 pieds. Et si au rayon CB, de 19611500, on ajoute la hauteur AB à laquelle on est au-dessus de B, on aura le côté AC; on connoîtra donc deux choses, outre l'angle droit; on pourra donc calculer l'angle CAD, dont la différence DAO avec un angle droit sera l'abaissement du rayon AD au-dessous du rayon AO parallele à la surface de la mer en B.

Si dans le même triangle ADC on calcule le côté AD, on aura la plus grande distance à laquelle la vue puisse s'étendre, lorsque l'œil est à la hauteur AB. Mais comme les tables ordinaires ne peuvent pas donner l'angle CAD et le côté AB avec une précision suffisante, lorsque AB est une très petite quantité à l'égard du rayon de la terre, voici comment on peut y suppléer.

On concevra AC prolongé jusqu'à la circonférence en E; alors AE étant une sécante, et AD une tangente, selon ce qui a été dit (129), on aura AE : AD :: AD : AB; ainsi, pour avoir AD, on prendra (Arith. 178) une moyenne proportionnelle entre AE et AB.

Par exemple, si l'œil A étoit élevé de 20 pieds au-dessus de la mer, AB seroit de 20 pieds, et AE seroit de deux fois 19611500 pieds, plus 20, c'est-à-dire, de 39223020 pieds; le carré de AD seroit donc de 39223020 × 20 ou de 784460400; donc (Arith. 178 et 139) AD seroit de 28008 pieds; c'est-à-dire, *qu'un œil élevé de 20* pieds au-dessus de la surface de

C'est-à-dire, R : *sin* B :: 42 : 35 ; ou bien, en écrivant le second rapport à la place du premier, 42 : 35 :: R : *sin* B.

Faisant l'opération par logarithmes, on a :

Log 35.	1,5440680
Log du rayon.	10 . . . . .
Complément arithmétique du *log* de 42.	8,3767507
Somme ou *log* du sinus de B.	19,9208187

qui, dans les tables, répond à 56° 27′ ; donc l'angle A, l'aire de vent, est de 33° 33′.

Exemple IV. On a couru selon la ligne AB, dont la sition et la grandeur sont inconnues ; mais on sait qu' avancé de 15 lieues à l'est, et de 35 lieues au nord : o mande la direction et la longueur de la route.

On connoît donc ici les deux côtés AC et BC de l droit, et l'on demande les angles et l'hypothénuse trouver l'angle A, on fera cette analogie (296), AC : R : *tang* A ; c'est-à-dire, 35 : 15 :: R : *tang* A.

Et faisant l'opération par logarithmes,

Log 15.	1,17
Log du rayon.	10 .
Complément arithmétique du *log* de	
Somme ou *log tang* A.	

qui, dans la table, répond à 23° 12′

Pour avoir AB, on peut, quan se conduire comme dans l'exe cessaire de calculer l'angle (164 et 166) suffit : ainsi au carré de

la mer peut découvrir jusqu'à 28008 pieds, ou une lieue et deux tiers à la ronde.

Maintenant, pour savoir de combien le rayon visuel AD est abaissé à l'égard de l'horizontale AO, on remarquera que, vu la petitesse de AB, la ligne AD ne peut différer sensiblement de l'arc BD; ainsi l'arc BD est de 28008 pieds. Or, puisque le rayon est de 19611500 pieds, on trouvera facilement (152) que la circonférence est de 123222688; et par conséquent (153), on trouvera le nombre de degrés de l'arc BD par cette proportion, 123222688 : 28008 :: 360° est à un quatrieme terme que l'on trouve de 0° 4′ 54″; ainsi l'angle ACD, et par conséquent DAO est de 0° 4′ 54″, lorsque AB est de 20 pieds.

Résolution des Triangles obliquangles.

298. On se sert du terme de *triangles obliquangles*, pour désigner en général les triangles qui n'ont point d'angle droit.

299. *Dans tout triangle rectiligne, le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, comme le sinus de tout autre angle du même triangle est au côté qui lui est opposé.*

Car si l'on imagine un cercle circonscrit au triangle ABC (fig. 153), et qu'ayant tiré les rayons DA, DB, DC, on décrive d'un rayon D*b* égal à celui des tables, le cercle *abc*; qu'enfin on tire les cordes *ab*, *bc*, *ac* qui joignent les points de section *a*, *b*, *c*, il est facile de voir que le triangle *abc* est semblable au triangle ABC; car les lignes D*a*, D*b* étant égales, sont proportionnelles aux lignes DA, DB; donc (105) *ab* est parallele à AB; on prouvera de même que *bc* est parallele à BC, et *ac* parallele à AC; donc (111) AB : *ab* :: BC : *bc*, ou AB : $\frac{1}{2}$*ab* :: BC : $\frac{1}{2}$*bc*; or, la moitié de la corde *ab* est (270) le sinus de *ah* moitié de l'arc *ahb*; et cette moitié de l'arc *ahb* est la mesure de l'angle *acb* qui a son sommet à la circonférence, et qui est égal à l'angle *ACB*; donc $\frac{1}{2}$*ab* est le sinus de l'angle ACB; on prouvera

de même que $\frac{1}{2}bc$ est le sinus de l'angle BAC; donc AB : *sin* ACB :: BC : *sin* BAC.

300. Cette proposition sert à résoudre un triangle, 1° lorsqu'on connoît deux angles et un côté; 2° lorsqu'on connoît deux côtés et un angle opposé à l'un de ces côtés.

EXEMPLE I. *On veut connoître les distances* CA, CB (fig. 205) *d'une galiote à bombes* C, *à deux batteries de côté* A *et* B.

Des points A et B, on observera (au même instant, si la galiote C est en mouvement) les angles CAB, CBA : puis on mesurera la distance AB des deux batteries A et B. Alors dans le triangle CAB, dont on connoît deux angles et un côté, on retranchera de 180 degrés la somme des deux angles connus, pour avoir le troisieme, et l'on déterminera AC et CB par les deux proportions suivantes :

sin C : AB :: *sin* B : AC.
sin C : AB :: *sin* A : BC.

Supposons, par exemple, que AB ait été trouvé de 256 toises, l'angle A de $84^d\ 14'$, l'angle B de $85^d\ 40'$, on aura l'angle C de $10^d\ 6'$; et pour avoir AC et BC, on opérera par logarithmes, comme il suit :

Log sin B.	9,9987567	*Log sin* A.	9,9977966
Log AB.	4,2082400	*Log* AB.	2,4082400
Complém. arith. *log sin* C.	0,7560528	Complém. arith. *log sin* C.	0,7560528
Log AC.	13,1630495	*Log* CB.	13,1620894
Donc AC.	1456 toises.	Donc CB.	1452 toises.

EXEMPLE II. *Connoissant la distance* AC (fig. 206) *d'un point* C *à l'angle flanqué d'un bastion, la distance* AB *des sommets des angles flanqués de deux bastions voisins, ou le côté extérieur du polygone, et ayant observé l'angle* C, *trouver la distance* BC.

Soit le côté extérieur AB de 200 toises, la distance AC de 130 toises, et l'angle C de $59^d\ 16'$. On commencera par calculer l'angle B par cette proportion, AB : *sin* C :: AC : *sin* B. Opérant donc par logarithmes, on aura

Log sin $59^d\ 16'$.	9,9342737
Log 130.	2,1139434
Complément arithmétique *log* 200.	7,6989700
Somme.	19,7471871

C'est le logarithme du sinus de l'angle B ; mais comme un sinus (273) appartient également à un angle aigu et à l'angle obtus qui en est le supplément, et que rien dans l'énoncé de la question ne détermine si l'angle B doit être aigu ou obtus, on n'est pas plus en droit de prendre pour valeur de l'angle B la quantité 33ᵈ 58′, qui répond dans les tables au logarithme trouvé, que son supplément 146ᵈ 2′. Mais supposons que l'on sache d'ailleurs que l'angle B doit être aigu ; alors nous devons prendre 33ᵈ 58′ pour sa valeur, d'où nous conclurons que l'angle B A C est de 86ᵈ 46′. Ainsi, pour avoir le côté BC, il ne s'agit donc plus que de faire cette proportion, *sin* C : AB :: *sin* BAC : BC ; donc

Log 200.	2,3010300
Log sin 86ᵈ 46′.	9,9993081
Complement arithmétique *log sin* 59ᵈ 16′. . .	0,0659263
Somme.	12,3660644

C'est le logarithme du côté BC, que l'on trouve par conséquent de 232ᵀ,3.

Iᵉʳ Cas. Si l'on connoît l'angle B, l'angle C, et le côté BC (fig. 65), on aura l'angle A, en ajoutant les deux angles B et C, et retranchant leur somme de 180° ; et pour avoir les deux côtés AC et AB, on fera les deux proportions :

sin A : BC :: *sin* B : AC
sin A : BC :: *sin* C : AB.

C'est ainsi qu'on peut résoudre par le calcul la question que nous avons examinée (121). Par exemple, si l'angle B a été observé de 78° 57′, l'angle C de 47° 34′, et le côté BC de 184 pieds, on aura 53° 29′ pour l'angle A, et l'on trouvera les deux autres côtés par ces deux proportions :

sin 53° 29′ : 184 :: *sin* 78° 57′ : AC
sin 53° 29′ : 184 :: *sin* 47° 34′ : AB.

Faisant ces opérations par logarithmes, comme il suit :

Log 184.	2,2648178
Log sin 78° 57′.	9,9918727
Complément arithmét. du *log sin* 53° 29′.	0,0949148
Somme ou *log* AC.	12,3516053

Log 184.	2,2648178
Log sin 47° 34′.	9,8680934
Complément arithmét. du *log sin* 53° 29′.	0,0949148
Somme ou *log* AB.	12,2278260

on trouvera que AC est de 224^p,7, et AB de 169^p.

IIe Cas. Si l'on connoît le côté AB (fig. 141), le côté BC et l'angle A, on déterminera l'angle C en calculant son sinus par cette proportion :

BC : *sin* A :: AB : *sin* C.

Mais il faut remarquer, selon ce que nous avons déja dit ci-dessus (267), que l'angle C ne sera déterminé qu'autant qu'on saura s'il doit être aigu ou obtus.

Par exemple, que AB soit de 68 pieds, BC de 37, et l'angle A de 32° 28′, la proportion sera 37 : *sin* 32° 28′ :: 68 : *sin* C. On trouvera, en opérant comme ci-dessus, que ce sinus répond, dans les tables, à 80° 36′; mais comme le sinus d'un angle appartient aussi au supplément de cet angle, on ne sait si l'on doit prendre 80° 36′, ou son supplément 99° 24′; mais si l'on sait que l'angle cherché doit être aigu, alors on est sûr qu'il est, dans ce cas-ci, de 80° 36′, et le triangle a alors la figure ABC; si au contraire il doit être obtus, il sera de 99° 24′, et le triangle aura la figure ABD.

Avant d'établir les deux propositions qui servent à résoudre les autres cas des triangles, il convient de placer ici une proposition qui nous sera utile pour l'application de ces deux propositions.

301. *Si l'on connoît la somme de deux quantités et leur différence, on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence à la moitié de la somme, et la plus petite, en retranchant au contraire la moitié de la différence de la moitié de la somme.*

Par exemple, si je sais que deux quantités font ensemble 57, et qu'elles different de 17, j'en conclus que ces deux quantités sont 37 et 20; en ajoutant d'une part la moitié de

17 à la moitié de 57, et retranchant de l'autre part la moitié de 17 de la moitié de 57.

En effet, puisque la somme comprend la plus grande et la plus petite, si à cette somme on ajoutoit la différence, elle comprendroit alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux quantités, plus la moitié de leur différence.

Au contraire, si de la somme on ôtoit la différence, il resteroit le double de la plus petite; donc la plus petite vaudroit la moitié du reste, c'est-à-dire, la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

302. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 et 155), *si de l'un des angles on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, on aura toujours cette proportion : Le côté* AC, *sur lequel tombe, ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, est à la somme* AB + BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — BC *de ces mêmes côtés est à la différence des segments* AD *et* DC, *ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au-dehors du triangle.*

Décrivez du point B comme centre, et d'un rayon égal au côté BC, la circonférence CEHF, et prolongez le côté AB jusqu'à ce qu'il la rencontre en E. Alors AE et AC sont deux sécantes tirées d'un même point pris hors du cercle; donc, selon ce qui a été dit (127), on aura cette proportion, AC : AE :: AG : AF.

Or, AE est égal à AB + BE ou AB + BC; AG est égal à AB — BG ou AB — BC, et AF est (fig. 154) égal à AD — DF ou (52) à AD — DC; donc AC : AB + BC :: AB — BC : AD — DC. Dans la figure 155, AF est égal à AD + DF ou AD + DC; on a donc, dans ce cas, AC : AB + BC :: AB — BC : AD + DC.

303. Donc, lorsqu'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette proposition, connoître les segment formés par la perpendiculaire menée d'un des angles sur l

côté opposé ; car alors on connoît (fig. 154) la somme AC de ces segments, et la proportion qu'on vient d'enseigner fait connoître leur différence, puisqu'alors les trois premiers termes de cette proportion sont connus : on connoîtra donc chacun des segments, par ce qui a été dit (301). Dans la figure 155, on connoît la différence des segments AD et CD, qui est le côté même AC, et la proportion détermine la valeur de leur somme.

304. Il est aisé, d'après cela, de résoudre cette question : *Connoissant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles ?*

On imaginera une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles ADC, CDB.

On calculera, par la proposition précédente, l'un des segments CD, par exemple; et alors, dans le triangle rectangle CDB connoissant deux côtés BC et CD outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle C, par ce qui a été dit (295).

Exemple. Le côté AB est de 142 pieds, le côté BC de 64, et le côté AC de 184; on demande l'angle C.

Je calcule la différence des deux segments AD et DC par cette proportion, 184 : 142 + 64 :: 142 — 64 : AD — DC, ou 184 : 206 :: 78 : AD — DC, que je trouve valoir 87,32 ; donc (301) le petit segment CD vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87,32, c'est-à-dire, qu'il vaut 48,34.

Cela posé, dans le triangle rectangle CDB je cherche l'angle CBD, qui, étant une fois connu, fera connoître l'angle C; et pour trouver cet angle CBD, je fais cette proportion (295), BC : CD :: R : *sin* CBD, c'est-à-dire, 64 : 48,34 :: R : *sin* CBD.

Opérant par logarithmes,

Log de 48,34.	1,6843066
Log du rayon.	1 . . . . .
Complément arithmétique du *log* de 64.	8,1938200
Somme ou *log sin* CBD.	19,8781266

qui dans les tables répond à 49° 3'; donc l'angle C est de 40° 57'.

pourra donc calculer le quatrieme, qui fera connoître la moitié de la différence des deux angles B et C. Alors, connoissant la demi-somme et la demi-différence de ces angles, on aura (301) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme, et le plus petit, en retranchant au contraire la demi-différence de la demi-somme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura aisément le troisieme côté par la proposition enseignée (299).

Exemple. Supposons que le côté AB soit de 142 pieds, et le côté AC de 120, et l'angle A de 48° : on demande les deux angles C et B, et le côté BC.

Je retranche 48° de 180°, et il me reste 132° pour la somme des deux angles C et B, et par conséquent 66° pour leur demi-somme.

Je fais cette proportion, $142 + 120 : 142 - 120 :: tang\, 66° : tang\, \frac{C - B}{2}$.

Ou $262 : 22 :: tang\, 66° : tang\, \frac{C - B}{2}$.

Et opérant par logarithmes,

Log tang 66°.	10,3514169
Log 22.	1,3424227
Complément arithmétique du *log* de 262.	7,5816987
Somme ou *log tang* de la demi-différence.	19,2755383

qui, dans la table, répond à 10° 41′.

Ajoutant cette demi-différence à la demi-somme 66°, et la retranchant de cette même demi-somme, j'aurai, comme on le voit ici :

	66° 0′		66° 0′
	10° 41′		10° 41′
L'angle C. . . .	76° 41′	L'angle B. . . .	55° 19′

Enfin, pour avoir le côté BC, je fais cette proportion, *sin* C : AB :: *sin* A : BC; c'est-à-dire, *sin* 76° 41′ : 142p ::
s[illegible] C.

Opérant comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera que BC vaut $108^p 4$.

307. Tels sont les moyens qu'on peut employer pour la résolution des triangles. Voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on peut en faire aux figures plus composées.

308. Supposons que C et D (fig. 157) sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connoître la distance.

On mesurera une base AB, des extrémités de laquelle on puisse appercevoir les deux objets C et D. On observera au point A les angles CAB, DAB, que font avec la ligne AB les lignes AC, AD, qu'on imaginera aller du point A aux deux objets C et D; on observera de même au point B les angles CBA, DBA. Cela posé, on connoît dans le triangle CBA les deux angles CAB, CBA et le côté AB; on pourra donc calculer le côté AC, par ce qui a été dit (300). Pareillement, dans le triangle ADB, on connoît les deux angles DAB, DBA et le côté AB; ainsi on pourra, par le même principe, calculer le côté AD; alors, en imaginant la ligne CD, on aura un triangle CAD, dans lequel on connoît les deux côtés AC, AD qu'on vient de calculer, et l'angle compris CAD; car cet angle est la différence des deux angles mesurés CAB, DAB; on pourra donc calculer le côté CD (306).

309. On peut aussi, par ce même moyen, savoir quelle est la direction de CD, quoiqu'on ne puisse approcher de cette ligne. Car, dans le même triangle CAD, on peut calculer l'angle ACD que CD fait avec AC: or, si par le point C on imagine une ligne CZ parallele à AB, on sait que l'angle ACZ est supplément de CAB, à cause des paralleles (40); donc, prenant la différence de l'angle connu ACZ à l'angle calculé ACD, on aura l'angle DCZ que CD fait avec CZ ou avec sa parallele AB; et comme il est fort aisé d'orienter AB, on aura donc aussi la direction de CD.

310. Nous avons dit, en parlant des lignes (3), que nous

donnerions le moyen de déterminer différents points d'un même alignement, lorsque des obstacles empêchent de voir les extrémités l'une de l'autre. Voici comment on peut s'y prendre.

On choisira un point C (fig. 158) hors de la ligne AB dont il s'agit, et qui soit tel qu'on puisse, de ce point, appercevoir les deux extrémités A et B; on mesurera les distances AC et CB, soit immédiatement, soit en formant des triangles dont ces lignes deviennent côtés, et qu'on puisse calculer comme dans l'exemple précédent (308). Alors, dans le triangle ACB, on connoîtra les deux côtés AC et CB, et l'angle compris ACB; on pourra donc (306) calculer l'angle BAC. Cela posé, on fera planter, selon telle direction CD qu'on voudra, plusieurs piquets; et ayant mesuré l'angle ACD, on connoîtra dans le triangle ACD le côté AC et les deux angles A et ACD; on pourra donc (300) calculer le côté CD; alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction CD, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculée; et le point D, où l'on s'arrêtera, sera dans l'alignement des deux points A et B.

311. S'il n'étoit pas possible de trouver un point C, duquel on pût appercevoir à-la-fois les deux points A et B, on pourroit se retourner de la maniere suivante.

On chercheroit un point C (fig. 159), d'où l'on pût appercevoir le point B, et un autre point E, d'où l'on pût voir le point A et le point C. Alors mesurant ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédents, les distances AE, EC et CB, on observeroit au point E l'angle AEC, et au point C l'angle ECB. Cela posé, dans le triangle AEC connoissant les deux côtés AE, EC, et l'angle compris AEC, on calculeroit, par ce qui a été dit (306), le côté AC et l'angle ECA; retranchant l'angle ECA de l'angle observé ECB, on auroit l'angle ACB; et comme on vient de calculer AC, et qu'on a mesuré CB, on retomberoit dans le cas précédent, comme si les deux points A et B eussent été visibles du point C; on achevera donc de la même maniere.

D'après ces méthodes et l'inspection de la figure 207, il est facile de voir comment on s'y prendroit pour établir une batterie sur le prolongement de la courtine AB.

312. S'il s'agit de mesurer une hauteur, et qu'on ne puisse approcher du pied, comme seroit la hauteur d'une montagne (fig. 160), on mesurera sur le terrein une base FG, des extrémités de laquelle on puisse appercevoir le point A dont on veut connoître la hauteur; ensuite avec le graphometre, dont BF et CG représentent la hauteur, on mesurera les angles ABC, ACB que font avec la base BC les lignes BA, CA, qu'on imagine aller des deux points B et C au point A; enfin à l'une des stations, en C, par exemple, on disposera l'instrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la figure 150, et on mesurera l'angle ACD, qui est l'inclinaison de la ligne AC à l'égard de l'horizon. Alors, connoissant dans le triangle ABC les deux angles ABC, ACB et le côté BC, il sera facile (300) de calculer le côté AC; et dans le triangle ADC, où l'on connoît maintenant le côté AC, l'angle mesuré ACD, et l'angle D qui est droit, puisque AD est la hauteur perpendiculaire, il sera facile de calculer AD, et on aura la hauteur du point A au-dessus du point C. Si l'on veut savoir ensuite quelle est la hauteur du point A au-dessus du point B ou de tout autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveler ou de trouver la différence de hauteur entre les points C et B; c'est ce dont nous allons parler dans un moment.

A, B, C (fig. 208) *sont trois points connus, c'est-à-dire, dont les distances et les angles que forment ces distances sont connus ; on veut établir une batterie hors de ces trois points, mais de maniere que du point* D, *où elle sera placée, on voie* AB *sous un angle connu, et* BC *sous un angle connu. On demande la position du point* D.

On imaginera un cercle dont la circonférence passe par les trois points A, C et D; puis, concevant la droite DBF, on imaginera les deux cordes AF et CF.

Dans le triangle AFC, on connoît AC, l'angle FAC égal à FDC, et l'angle FCA égal à FDA; on pourra donc calculer FC et FA (300).

Dans le triangle FBC, on connoît FC, BC; et l'angle FCB, composé de FCA, égal à FDA, et de ACB connu : on pourra donc (306) calculer l'angle CBF, dont le supplément est CBD.

Alors dans le triangle CDB, où l'on connoît CB, l'angle CBD et l'angle BDC, il sera facile de calculer DC. On s'y prendra de même pour calculer AD, par le moyen des triangles AFC, ABF et ABD.

Si la somme des deux angles observés ADB, BDC étoit égale à l'angle ABC ou à son supplément, le problême seroit indéterminé ou susceptible d'une infinité de solutions; le point B se trouveroit alors sur la circonférence.

Parmi les exemples que les commençants peuvent prendre pour s'exercer aux calculs trigonométriques, nous croyons devoir leur indiquer le calcul des lignes et des angles d'un front de fortification régulière; par exemple, dans un pentagone construit selon le premier système de M. de Vauban.

Nous supposerons le côté extérieur AB (fig. 211) de 180 toises, la perpendiculaire CD de 30 toises, les faces de bastion AE, BF de 50 toises; la largeur AG du fossé, vis-à-vis de l'angle flanqué, ou le rayon de l'arrondissement de la contrescarpe, de 18 toises; la capitale HI de la demi-lune, de 55 toises; la distance ET de l'angle de l'épaule à la rencontre T de la face QI de la demi-lune, de 3 toises.

Alors le triangle ACD, rectangle en C, dans lequel on connoît AC et CD, fera connoître les angles DAC, ADC, par ce qui a été dit (296), et le côté AD, par ce qui a été dit (166); l'angle DAC étant connu, on aura ses égaux DBC, ELK, FKL; et du même angle DAC, comparé à la moitié de l'angle intérieur du pentagone, on conclura la moitié de l'angle flanqué VAE.

AD et AE étant connus, on aura DE et son égal DF : ainsi dans le triangle ADF, où l'on connoît AD et DF, et l'angle ADF, double de ADC, on calculera (306) les angles DFA, DAF, et le côté AF; et comme dans cette construction le triangle AFL est isocele, par le moyen du triangle LAF, on aura facilement les deux angles ALF et AFL. Ajoutant au premier de ces deux angles l'angle KLE égal à DAC, on aura l'angle KLF de la courtine. Et retranchant de l'angle AFL l'angle calculé AFD, on aura KFL, dont le supplément LFE est l'angle de l'épaule.

Si de AL égale à AF calculé on retranche AD, on aura DL; et les triangles semblables ADB, KDL donneront KL ou la courtine.

Dans le triangle KLF, dont tous les angles sont connus et le côté KL, on aura aisément KF et LF (300).

De KF retranchant FD, on aura KD; et dans le triangle rectangle KMD, où l'on connoît KD et KM, on aura MD (166). On connoîtra donc MC.

Dans le triangle AOC (en imaginant que O est le centre du polygone), on connoît AC et les angles; on calculera donc facilement AO et OC (295 et 296).

Dans le triangle rectangle AGF, où l'on connoît AF et AG, on calculera FAG (299), qui, étant ajouté à FAD et à DAO actuellement connus, donnera le supplément de GAN.

On aura donc GAN et son complément ANG ou ONH, d'où par le triangle ONH, dont l'angle NOH est connu, il sera facile de conclure l'angle NHO, et par conséquent son supplément QHI.

Dans le triangle rectangle NAG, il sera donc facile de calculer AN; ce qui donnera ON dans le triangle ONH, où les angles étant d'ailleurs connus, on pourra calculer OH. On aura donc CH; et comme on connoît HI, on aura CI. Ajoutant CI à CD, on aura DI dans le triangle TDI, où l'on connoît d'ailleurs DT ou DE + ET, et l'angle TDI : on pourra donc (310) calculer l'angle DIT ou HIQ du triangle HIQ, dont on connoît actuellement HI et l'angle QHI. D'où il sera facile de calculer dans ce triangle QHI, la demi-gorge QH, et la surface QI de la demi-lune QIP.

313. Nous avons dit (153) que pour calculer la surface d'un segment AZBV (fig. 74) dont le nombre des degrés de l'arc AVB et le rayon sont connus, il falloit calculer la surface du triangle IAB, pour la retrancher de celle du secteur IAVB : c'est une chose facile actuellement; car, dans le triangle rectangle IZB, on connoît, outre l'angle droit, le côté IB et l'angle ZIB, moitié de AIB, mesuré par l'arc AVB; on calculera donc facilement (295) IZ qui est la hauteur du triangle, et BZ qui est moitié de la base.

On peut encore conclure de ce qui précede, le moyen de faire un angle ou un arc d'un nombre déterminé de degrés et minutes. On tirera une droite CB (fig. 145) de grandeur arbitraire, que l'on prendra pour côté de l'angle; et ayant imaginé l'arc BDA décrit du point C, le rayon CA et la

corde BA, si l'on imagine la perpendiculaire CI, et si l'on mesure CB, on connoîtra, dans le triangle rectangle CIB, l'angle droit, le côté CB et l'angle BCI, moitié de celui dont il s'agit; on pourra donc calculer BI, dont le double sera la valeur de la corde AB : ainsi, prenant une ouverture de compas égale à ce double du point B comme centre, on marquera le point A sur l'arc BDA, et tirant CA, on aura l'angle demandé.

Nous pourrions indiquer ici une infinité d'autres usages de la trigonométrie; mais en voilà assez pour mettre sur la voie : d'ailleurs, nous aurons assez d'occasions, par la suite, d'avoir recours à cette partie.

Usages de la Trigonométrie pour lever et tracer les Plans.

L'art de tracer les plans consiste à déterminer sur le papier des points qui soient placés entre eux comme le sont sur le terrein les objets que ces points doivent représenter. On suppose alors que tous les objets dont il s'agit sont situés dans un même plan horizontal; mais s'ils n'y étoient pas, en sorte que les opérations qu'on aura faites pour déterminer les situations respectives de ces objets n'eussent pas été faites toutes dans un même plan horizontal ou à-peu-près, il faudroit, avant que de tracer le plan, ramener ces observations à ce qu'elles auroient été, si on les eût faites dans un plan horizontal. Nous allons d'abord expliquer comment on doit s'y prendre quand les observations ont été faites dans un plan horizontal, ou y ont été réduites; nous ferons voir ensuite comment on les y réduit.

Soient donc A, B, C, D, E, F, G, H, I, K (fig. 75) plusieurs objets remarquables, dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossièrement sur un papier ces objets, dans les positions qu'on leur juge à l'œil; et pour cet effet, on se transportera aux différents lieux où il sera nécessaire, pour prendre une connoissance legere de tous ces objets : ce premier dessin, qu'on appelle un *croquis* ou *brouillon*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base AB, dont la longueur ne soit pas trop disproportionnée à la distance des objets les plus éloignés qu'on peut

voir de ses extrémités, et qui soit telle en même temps, que de ces mêmes extrémités on puisse appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra; alors, avec le graphometre, on mesurera au point A les angles EAB, FAB, GAB, CAB, DAB que font au point A, avec la base AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce point aux objets E, F, G, C, D, qu'on suppose pouvoir être apperçus des extrémités A et B de la base : on mesurera de même, au point B, les angles EBA, FBA, GBA, CBA, DBA que font en ce point, avec la ligne AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point B aux mêmes objets que ci-dessus.

S'il y a des objets, comme H, I, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités A et B, on se transportera en deux des lieux E et F qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces objets H et I; alors, regardant EF comme une base, on mesurera les angles HEF, IEF, HFE, IFE que font avec cette nouvelle base les lignes qui iroient de ses extrémités aux deux objets H et I. Enfin, s'il y a quelqu'autre objet, comme K, qu'on n'ait pu voir, ni des extrémités de AB, ni de celles de EF, on prendra encore pour base quelqu'autre ligne, comme FG qui joint deux des points observés, et on mesurera de même, à ses deux extrémités, les angles KFG, KGF.

Cela posé, dans les triangles ACB, ADB, AEB, AFB, AGB, *dans chacun* desquels on connoît le côté AB et les deux angles adjacents à ce côté, il sera facile (300) de calculer les deux autres côtés.

A l'égard des triangles HEF, IEF, comme on n'y a mesuré que les angles sur EF, on commencera par calculer EF à l'aide du triangle EAF, dans lequel on connoît l'angle EAF, différence des deux angles observés EAB, FAB, et les côtés AE, AF qu'aura donnés le calcul précédent : il sera donc facile d'avoir EF, par ce qui a été dit (306); alors, dans chacun des triangles HEF, IEF, on connoîtra le côté EF et les deux angles adjacents : on calculera les deux autres côtés, comme il vient d'être dit pour les premiers : on se conduira de même pour le triangle KFG.

Ces calculs étant faits, on tirera (fig. 76) sur le papier une ligne *ab*, que l'on fera d'autant de parties de l'échelle qui doit déterminer la grandeur que l'on veut donner au plan, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de toises ou de pieds dans AB; puis pour déterminer l'un quelconque des points que l'on a pu voir des extrémités A et B de la base, le point E, par exemple, on prendra sur l'échelle autant de parties que le calcul a donné de toises ou de pieds pour AE, et

du point *a* comme centre, et d'un rayon *ae* égal à ce nombre de parties, on décrira un arc. On prendra pareillement sur l'échelle autant de parties qu'on a trouvé de toises ou de pieds dans BE, et du point *b* comme centre, et d'un rayon égal à ce nombre de parties, on décrira un arc qui coupe celui qui a été décrit du rayon *ae*, en un point C, lequel représentera sur le papier la position du point *e* à l'égard de *ab*, semblable à celle de E à l'égard de AB ; car, par cette construction, le triangle *aeb* a les côtés proportionnels à ceux du triangle AEB ; il lui est donc semblable : on s'y prendra de même pour déterminer les points *f*, *g*, *c*, *d*, qui doivent être la représentation des points F, G, C, D.

A l'égard des points *h*, *i*, *k*, qui doivent être la représentation des objets H, I, K, qui n'ont pu être apperçus des points A et B ; les points *e*, *f*, *g* ayant été déterminés comme il vient d'être dit, les lignes *ef* et *fg* serviront de base, comme *ab* en a servi pour *c*, *d*, *e*, *f*, *g* : en sorte que l'opération se réduira de même à tracer des points *e* et *f* comme centres, et des rayons *he*, *hf* qui contiennent autant de parties de l'échelle, que HE et HF ont été trouvés (par le calcul) contenir de toises ou de pieds ; à tracer, dis-je, deux arcs dont l'intersection *h* marquera le point H, et ainsi des autres. Alors la figure tracée sur le papier sera semblable au terrein que l'on a levé (133), puisqu'elle sera composée d'un même nombre de triangles que celui-ci, semblables à ceux de ces derniers et semblablement disposés : il ne s'agira plus que de dessiner, à chacun de ces points, les objets qu'on y aura remarqués ; et on remplira les parties intermédiaires, qui demandent moins de scrupule, par les moyens dont nous parlerons plus bas.

Il faut observer encore que cette methode devant être employée pour fixer les points principaux et fondamentaux du plan, il est à propos d'employer un graphometre à lunettes, plutôt qu'un graphometre à pinnules.

De la Maniere de réduire les Angles observés dans des plans inclinés à l'horizon, à ceux qu'on observeroit si les objets étoient dans un plan horizontal.

Lorsque, dans les opérations précédentes, les objets ne sont pas tous situés dans un même plan horizontal, il faut, avant que de former le plan qui doit les représenter, réduire les angles à ce qu'ils au-

roient été observés, si tous les objets eussent été dans un même plan horizontal : voici comment cela peut s'exécuter.

Soient A, B, C (fig. 209) trois points différemment élevés au-dessus de l'horizon, et dont les hauteurs respectives soient AD, FB, CE; en sorte que FDE soit un plan horizontal : on a mesuré l'angle BAC; mais comme le plan sur lequel on veut rapporter ces objets est FDE, on imagine que B est placé en F, A en D, et C en E; et l'on demande l'angle FDE.

A la station que l'on fera pour mesurer l'angle BAC, on mesurera aussi les angles BAD, CAD que font les rayons visuels AB, AC avec le fil à-plomb au point A; ce que l'on fera comme il a été expliqué dans l'exemple relatif à la figure 150, page 173.

Cela posé, concevons que AB et AC prolongés, s'il est nécessaire, rencontrent le plan horizontal FDE aux points G et I; dans les triangles ADG, ADI, rectangles en D, si on regarde AD comme le rayon des tables, DG et DI seront les tangentes des angles observés GAD, IAD, et AG, AI en seront les sécantes; donc, si on prend dans les tables les sécantes et les tangentes des angles GAD et IAD, on connoîtra : 1° Dans le triangle GAI, les côtés GA et AI, et l'angle observé GAI; on pourra donc, par ce qui a été dit (306), calculer le côté GI. 2° Dans le triangle GDI, on connoîtra les côtés GD et DI, et le côté GI que l'on vient de calculer; on pourra donc, par ce qui a été dit (306), calculer l'angle GDI.

On s'y prendroit d'une maniere semblable pour réduire l'angle observé au point B; et lorsque dans un triangle on aura réduit deux angles, il sera inutile de faire un semblable calcul pour réduire le troisieme, parceque les trois angles du triangle réduit ne pouvant valoir que 180^d, le troisieme sera toujours facile à avoir.

Ayant ainsi réduit les angles, il sera facile de réduire les distances, ou l'une d'entre elles (car il suffit d'en réduire une pour chaque triangle). En effet, si on imagine l'horizontale BO, dans le triangle BAO, rectangle en O, on connoît BA qui a été mesuré, l'angle droit et l'angle BAO; on aura donc (295) facilement BO ou FD.

EXEMPLE.

On a trouvé l'angle BAC de $62^d\ 37'$, l'angle BAD de $88^d\ 5'$, et l'angle CAD de $78^d\ 17'$.

Je cherche *dans les tables* les sécantes et les tangentes des angles

BAD et CAD, et je trouve comme il suit, en négligeant les trois dernieres décimales :

Sec	88^d	5'	ou AG.	29,90
Sec	78	17	ou AI.	4,92
Tang	88	5	ou DG.	29,88
Tang	78	17	ou DI.	4,82

Alors, dans le triangle AGI, je calcule (310) la demi-différence des deux angles AGI, AIG par cette proportion, AG + AI : AG — AI :: *tang* 58^d 41', demi-somme de ces deux angles, est à un quatrieme terme; je trouve donc que cette demi-différence est 49^d 42', ce qui donne l'angle AGI de 8^d 59'; d'où (304) on trouvera GI de 27,98.

Connoissant les trois côtés DG, DI, GI, on trouvera (304) que l'angle GDI est de 62^d 27'.

Si les tables dont on fait usage ne contenoient pas les sécantes, on les auroit néanmoins facilement par le principe donné (278).

Des Méthodes par lesquelles on peut suppléer à la Trigonométrie, dans l'art de lever les Plans.

L'usage du calcul trigonométrique, dans l'art de lever les plans, n'est indispensable que lorsque les points principaux de l'espace dont on veut former la carte, sont à des distances assez considérables les uns des autres.

Mais lorsque les distances sont médiocres, après avoir mesuré une base et observé les angles, comme il vient d'être dit (page 196), au lieu de calculer les triangles pour former, à l'aide des côtés calculés et réduits à l'échelle du plan, des triangles semblables à ceux qu'on a observés sur le terrein, on se contente de former ces triangles semblables par le moyen des angles observés, ainsi que nous allons le dire.

Cette méthode est moins exacte que la précédente, en ce que le rapporteur, ou en général l'instrument que l'on emploie pour former sur le papier des angles égaux à ceux qu'on a observés sur le terrein, ne pouvant être que d'un assez petit rayon, on ne peut apporter, dans la formation de ces angles, la même précaution qu'on peut apporter en mesurant sur l'échelle la valeur que le calcul a déterminée pour les côtés.

Mais comme il est peu ordinaire qu'on ait besoin d'une exactitude

aussi scrupuleuse, et que d'ailleurs la méthode de rapporter les angles sur le papier est beaucoup plus expéditive, cette derniere doit être regardée comme étant d'un usage fort étendu et suffisamment exact. Elle consiste à tirer (fig. 76) une ligne *ab* qui contienne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de mesures dans la base AB. Puis aux extrémités *a*, *b*, on fait les angles *eab*, *eba*, *fab*, *fba*, etc. égaux aux angles observés EAB, EBA, FAB, FBA, etc. que font avec la base AB les objets que l'on a pu voir des points A, B. Puis joignant les points *e*, *f* par la droite *ef*, on forme aux extrémités de cette ligne, comme base, des angles égaux à ceux qu'on a observés des deux points E et F, et ainsi de suite.

On peut aussi se dispenser du calcul trigonométrique pour réduire à des angles horizontaux ceux qu'on auroit observés dans des plans inclinés à l'horizon. En voici la méthode.

Les mêmes observations étant supposées qu'à la page 199 pour la figure 210, au point A (fig. 210) de la ligne quelconque AD, on fera les angles DAG, DAI égaux aux angles verticaux observés DAG et DAI de la figure 209; au point quelconque D (fig. 210), on élevera sur AD la perpendiculaire indéfinie IDG. Au point A, on menera la ligne AM faisant avec AI l'angle IAM égal à l'angle BAC qu'il s'agit de réduire; et ayant fait AM égal à AG, on tirera IM. Puis du point I comme centre, et du rayon IM, du point D comme centre, et du rayon DG, on décrira deux arcs qui se coupent en O; l'angle IDO sera l'angle demandé.

De la Boussole et de son usage pour lever les parties de détail d'un Plan.

La principale piece de la boussole (fig. 212) est une aiguille aimantée soutenue en son milieu par un pivot, sur lequel elle a toute la mobilité possible. Cette aiguille est renfermée dans une boîte de cuivre ou de bois. Sur le bord intérieur de cette boîte, on marque les 360 degrés; et vers le bord extérieur et aux divisions 180 degrés et 360 degrés, ou parallèlement à la ligne qui passe par ces deux divisions, on place deux pinnules qui forment ensemble ce qu'on appelle la *visiere*.

L'usage de la boussole est fondé sur la propriété qu'a l'aiguille aimantée de rester constamment dans une même position, ou d'y revenir quand elle *en a été écartée* (du moins dans un même lieu et pen-

dant un assez long intervalle de temps). D'où il suit que si on fait tourner la boite de la boussole, on pourra juger de la quantité dont elle a tourné, en comparant le point de la graduation auquel l'aiguille répondra à celui auquel elle répondoit d'abord.

On applique assez ordinairement une boussole au graphometre, non dans la vue de suppléer au graphometre, mais pour *orienter* les objets, c'est-à-dire, pour connoître, à environ un demi-degré, leur position à l'égard des quatre *points cardinaux*, ou à l'égard de la ligne *nord* et *sud*, avec laquelle l'aiguille aimantée fait constamment le même angle dans un même lieu, du moins pendant le cours d'environ une année.

La boussole est employée aux mêmes usages que le graphometre, c'est-à-dire, à la mesure des angles; mais plusieurs raisons ne permettant pas de donner beaucoup de longueur à l'aiguille, les degrés de la graduation occupent trop peu d'étendue sur l'instrument, pour qu'on puisse mesurer les angles avec autant de précision qu'avec le graphometre : c'est ce qui fait qu'on n'emploie la boussole que pour déterminer les points de détail d'un plan ou d'une carte dont les points principaux ont été fixés par les moyens précédemment décrits.

Supposons donc qu'il s'agit de lever le cours d'une riviere, par exemple; on plantera des piquets aux coudes les plus sensibles A, B, C, D, E, F (fig. 213); et ayant placé la boussole au point A, en sorte que la visiere soit dirigée le long de AB, on observera sur la graduation quel est le nombre des degrés compris entre la ligne AB et la direction actuelle de l'aiguille : puis on mesurera AB. On établira ensuite la boussole au point B; on dirigera de même la visiere le long de BC, et l'on observera de même l'angle que BC forme avec BN, direction de l'aiguille, qui est parallele à la premiere direction AN; on mesurera BC, et on fera pareilles opérations à chaque détour. Ayant ainsi mesuré tous les angles et toutes les distances, on les rapportera sur le papier de la maniere suivante :

On prendra arbitrairement le point *a* (fig. 214), qui doit représenter le point A, et l'on menera arbitrairement la ligne *an*, pour représenter la direction de l'aiguille aimantée. Au point *a*, on fera, à l'aide du rapporteur, l'angle *nab* égal à l'angle observé NAB, et on donnera à *ab* autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de mesures pour AB. Au point *b*, on menera *bn* parallele à *an*, l'on fera l'angle *nbc* égal à l'angle observé NBC, et on donnera à *bc* autant de parties de l'échelle qu'on a trouvé de mesures pour BC. (

continuera de même pour tous les autres points, après quoi on figurera les parties intermédiaires à-peu-près telles qu'on les a jugées à la vue.

Ce que nous disons des détours d'une riviere s'applique évidemment aux détours d'un chemin, à l'enceinte d'un bois, au contour d'un marais, etc.

De la Planchette, et de son usage pour lever les Plans.

Il y a encore une autre maniere de lever, qui est d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même temps qu'on observe les différents points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument qu'on emploie à cet effet est représenté par la figure 78. ABCD est une planche de 16 à 18 pouces de long, et à-peu-près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphometre. Sur cette planche on étend une feuille de papier, qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. LM est une regle garnie de pinnules placées à ses deux extrémités et dans un alignement parallele au bord de la regle.

Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne, on prend une base *mn*, comme dans les opérations ci-dessus, et, posant le pied de l'instrument en *m*, on fait planter un piquet en *n*. On applique la regle LM sur le papier, et on la dirige de maniere à voir le piquet placé en *n* à travers les deux pinnules : alors on tire le long de la regle une ligne EF, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de mesures entre le point E, d'où l'on observe d'abord, et le point *f*, d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la regle autour du point E, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant au travers des pinnules, quelqu'un des objets I, H, G; et à mesure qu'on en rencontre un, on tire le long de la regle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorsqu'on est en *m*, on transporte l'instrument en *n*, et on laisse un piquet en *m* : alors on fait au point *n* les mêmes opérations à l'égard des objets I, H, G, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes *fi*, *fh*, *fg*, qui dans ce second cas vont ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premieres aux points *g*, *h*, *i*, qui sont la représentation des objets G, H, I.

La planchette s'emploie principalement pour lever les détails d'un pays dont les points principaux ont déja été déterminés exactement

par les moyens ci-dessus, et rapportés ensuite sur le papier, ou pour ajouter à une carte déja construite des objets dont la position auroit été omise.

Par exemple, supposant que A, B, C (fig. 215) sont des points qui ont été déja déterminés et marqués sur la carte en *a*, *b*, *c*; que D soit un point dont la position est inconnue : voici comment avec la planchette on déterminera sa position *d*. On établira la planchette au point D, et on l'orientera de la maniere qui va être expliquée ci-dessous; alors on dirigera l'alidade dans l'alignement A*a*, et ensuite dans l'alignement B*b*, et traçant une ligne le long de l'alidade, dans chaque alignement, la rencontre *d* marquera sur la carte la position du point D à l'égard des objets A, B, C. On vérifiera cette position, en dirigeant l'alidade suivant C*c*, et observant si cette ligne prolongée passe par le point *d*.

On marque ordinairement sur la carte la direction de l'aiguille aimantée; et pour cet effet, on emploie une boussole de figure rectangulaire, telle qu'on voit (fig. 216), dont la largeur est environ le tiers de la longueur; dans le milieu du fond est gravée une ligne parallele au long côté de la boite : c'est sur cette ligne qu'est placé le pivot qui porte l'aiguille.

Pour marquer sur le plan la direction de l'aiguille aimantée, on établit l'alidade de la planchette dans l'alignement de deux objets marqués sur ce plan, et de maniere que la représentation de ces objets sur le plan soit sur ce même alignement : alors on place la boussole sur la planchette, et on la tourne jusqu'à ce que l'aiguille s'arrête dans la ligne nord et sud de la boite, c'est-à-dire, dans la ligne du milieu du fond de la boite; enfin on trace une ligne selon la direction du long côte de la boite : c'est la direction de l'aiguille.

Reciproquement, lorsque la direction de l'aiguille est marquée sur la carte, et qu'on veut donner à la carte ou a la planchette la même disposition qu'ont les objets sur le terrein, il ne s'agit que de faire convenir la ligne nord et sud de la carte avec la ligne nord et sud de la boussole.

Au lieu de determiner la position des objets par deux stations, comme nous l'avons expliqué ci-dessus pour la figure 78, on se contente souvent d'une seule station; mais alors on mesure pour chaque objet la distance de la planchette à cet objet, et on la rapporte en parties de l'echelle du plan, le long de la regle dirigee sur cet objet.

Du Quart-de-cercle.

Quoique le quart-de-cercle dont il s'agit ici n'ait aucun rapport avec a trigonométrie, ni avec l'art de lever les plans, nous n'en placerons pas moins ici la description parmi les instruments qui servent à la mesure des angles.

On appelle *quart-de-cercle*, dans l'artillerie, tout instrument propre à faire connoître le degré d'inclinaison des bouches à feu, quoique quelques uns de ces instruments ne soient composés que d'un arc de 45 degrés.

Celui dont on a fait le plus d'usage est le quart-de-cercle ACD (fig. 217), qui, outre ses deux rayons ou regles CA, CD, et son limbe AD, divisé en 90 parties, porte une regle AB perpendiculaire à l'extrémité du rayon CA; au centre C est attaché un fil qui porte le plomb I, dont nous allons voir l'usage.

Lorsqu'on veut mesurer l'inclinaison d'un mortier avec ce quart-de-cercle, on lui donne l'une ou l'autre des deux dispositions, représentées par les figures 218 et 219 : dans la premiere (fig. 218), la regle AB est appliquée sur la coupe du mortier, et dans la seconde (fig. 219), elle est placée sur la plate-bande, et parallèlement à l'axe; dans l'une et dans l'autre, on s'assure que le plan du quart-de-cercle est vertical, lorsque le fil à-plomb CI ne fait que raser le limbe de l'instrument.

Dans la figure 218, l'inclinaison du mortier est mesurée par l'angle DCI ou l'arc DI, compris entre le fil à-plomb et le rayon CD, parallele à la regle AB, parceque cette inclinaison est le complément de l'angle que l'axe du mortier ou sa parallele CA fait avec la verticale ou CI.

Dans la figure 219, l'inclinaison du mortier est mesurée par l'angle ACI que fait le fil à-plomb avec le rayon CA perpendiculaire à la regle AB.

Les figures 220 et 221 représentent le même instrument réduit à 45^d. Dans la position indiquée par la figure 220, on ne peut mesurer que les inclinaisons au-dessous de 45^d; et la position indiquée par la figure 221 ne peut servir que pour celles qui sont au-dessus de 45^d.

Dans la figure 220, l'angle ACI mesure l'inclinaison du mortier; et dans la figure 221, l'inclinaison est mesurée par le complément de ACI.

La figure 222 représente l'instrument que l'on emploie pour mesurer l'inclinaison de l'axe des pieces de canon.

AB est une regle de fer large d'environ 15 lignes, épaisse de 4, et de 3 à 4 pieds de longueur. A son extrémité B est fixé un plateau de fer BE, auquel, et sur son bord, la regle AB est perpendiculaire. Ce plateau, de même épaisseur que la regle, est circulaire, et d'un diametre un peu moindre que celui de la piece. Il est percé, en son milieu, d'un trou, pour donner passage à l'air quand on l'introduit dans le canon.

L'autre extrémité A de la regle AB porte fixément un secteur circulaire de cuivre, d'environ 15 pouces de rayon, dont le limbe CD est divisé en degrés et demi-degrés. La graduation commence à l'extrémité C du rayon AC perpendiculaire à la regle, et s'étend jusqu'à 45ᵈ de C vers D, et seulement jusqu'à 4 ou 5ᵈ à l'opposite. Du centre pend un fil ou un cheveu chargé d'un plomb, renfermé dans un garde-filet, pour le mettre à l'abri du vent. Ce garde-filet est une boîte de cuivre longue et étroite, mobile autour du centre A; il est percé, vers le bas, d'un petit trou, dont l'ouverture est garnie d'un verre ou d'une loupe, pour mieux reconnoître la division du limbe qui répond au fil. Le fond de ce garde-filet peut aussi loger un petit vase rempli d'eau, dans laquelle on fait plonger le plomb, afin d'arrêter ses vibrations.

Cet instrument n'est pas destiné pour la guerre; mais on l'emploie utilement pour des expériences qui demandent de la précision.

Du Nivellement.

314. Plusieurs observations démontrent que la surface de la terre n'est point plane comme elle le paroît, mais courbe, et même sphérique, ou à très peu de chose près sphérique. Lorsqu'un vaisseau commence à découvrir une côte, les premiers objets qu'on remarque sont les objets les plus élevés. Or, si la surface de la terre étoit plane, en même temps qu'on découvre la tour B (fig. 161), on devroit appercevoir tout le terrein adjacent ABC. Ce qui fait qu'il n'en est pas ainsi, c'est que la surface DAC de la terre s'abaisse de plus en plus à l'égard de la ligne horizontale DB du vaisseau. Deux points D et B peuvent donc paroitre dans une même ligne horizontale DB, quoiqu'ils soient fort inégalement éloignés de la surface, et par conséquent du cen-

re T de la terre. Ce qu'on appelle *ligne horizontale*, c'est une ligne tirée dans un plan qui touche la surface de la mer, ou parallèlement à ce plan qu'on appelle *plan horizontal;* et une *ligne verticale* est une perpendiculaire à un plan horizontal.

Ce qu'on appelle *niveler,* c'est déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre à l'égard du centre de la terre.

315. Lorsque l'un de ces objets, vu de l'autre, paroît dans la ligne horizontale qui part de celui-ci, alors ils sont différemment éloignés du centre de la terre. Pour connoître cette différence, il faut remarquer que la distance à laquelle on peut appercevoir un objet terrestre, ou du moins que la distance à laquelle on observe dans le nivellement, est toujours assez petite pour que cette distance DI (fig. 162), mesurée sur la surface de la terre, puisse être regardée comme égale à la tangente DB : or, on a vu (129) que la tangente BD étoit moyenne proportionnelle entre toute sécante menée du point B, et la partie extérieure BI de cette même sécante; mais à cause de la petitesse de l'arc DI, on peut regarder la sécante qui passe par le point B et le centre T, comme égale au diametre, c'est-à-dire, au double de IT ou au double de DT; donc BI sera le quatrieme terme de cette proportion, 2 DT : DI :: DI : BI.

Supposons, par exemple, que DI, mesuré sur la surface de la terre, soit de 1000 toises ou 6000 pieds; comme le rayon de la terre est de 19611500 pieds, on trouvera BI par cette proportion, 39223000 : 6000 :: 6000 : BI. En faisant le calcul, on trouve $0^{p},91783$, qui reviennent à $11^{p}\ 0^{l}\ 2^{p^{ts}}$; c'est-à-dire, qu'entre deux objets B et D éloignés de mille toises, et qui seroient dans une même ligne horizontale, la différence BI du niveau ou de distance au centre de la terre est de $11^{p}\ 0^{l}\ 2^{p^{ts}}$.

316. Quand on a calculé une différence de niveau comme BI, on peut calculer plus facilement celles qui répondent à une moindre distance, en faisant attention que les distances

BI, *bi* sont presque paralleles et égales aux lignes DQ, D*q*, qui (170) sont entre elles comme les carrés des cordes ou des arcs DI, D*i*; car ici les cordes et les arcs peuvent être pris l'un pour l'autre : ainsi, pour trouver la différence *bi* de niveau, qui répondroit à 5000 pieds, je ferai cette proportion, $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0{,}91783 : bi$, que je trouve en faisant le calcul de 0,63738 ou $7^p\, 7^l\, 9^{pts}\, \frac{2}{5}$.

317. Ces notions supposées, pour connoître la différence de niveau de deux points B et A (fig. 163) qui ne sont pas dans la ligne horizontale menée par l'un d'entre eux, on emploiera un instrument propre à mesurer les angles, que l'on disposera comme il a été dit dans l'exemple relatif à la figure 150; on observera l'angle BCD, et ayant mesuré la distance CD ou CI à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement et à diverses reprises au-dessus du terrein AVC, on pourra, dans le triangle CDB, considéré comme rectangle en D, calculer BD, auquel on ajoutera la hauteur CA de l'instrument, et la différence DI de niveau, calculée par ce qui vient d'être dit (315 et 316).

Mais comme cette maniere d'opérer suppose une grande exactitude dans la mesure de l'angle BCD et un instrument bien exact, on préfere souvent d'aller au même but par une voie plus longue que nous allons décrire.

L'usage de cet instrument exige une autre piece que l'on appelle la *mire*. C'est un carton ou une feuille de fer-blanc (fig. 164), d'environ un pied en carré, partagé en deux également par une ligne horizontale MN qui sépare la partie inférieure noircie, de la partie supérieure qui reste blanche. On attache ce carton sur une regle, de maniere que MN soit perpendiculaire à la longueur de la regle. Celle-ci doit entrer à coulisse dans une rainure, le long d'une double toise OP divisée en pieds, pouces et lignes; la regle, en parcourant ainsi la rainure, permet de porter la ligne de mire où il en est besoin, et de l'y fixer.

Pour faire usage de ce niveau, on le place à distances à-peu-près égales des deux points dont on veut avoir la différence du niveau. Il n'est pas nécessaire que ce soit dans l'alignement de ces deux points. On pose la mire successivement à chacun de ces points, de maniere

que la double toise soit verticale. On haussse ou baisse la mire MN, jusqu'à ce que l'observateur, qui est au niveau CABD, apperçoive la ligne MN dans le prolongement de la ligne CD : alors la différence de hauteur de la mire MN, dans chacune des deux positions, sera la différence de niveau des deux points dont il s'agit.

Si l'on trouve, par exemple, qu'à l'un de ces points la ligne de mire MN a été élevée jusqu'à $4^p\ 8^{po}$, et qu'à l'autre elle ait été élevée jusqu'à $3^p\ 9^{po}$, on en conclura que la différence du niveau de ces deux points est de 11 pouces.

On s'y prendra de même pour tous les autres points qui seront à-peu-près à la même distance de la même station, qui pourront en être apperçus, et dont la différence du niveau avec CD n'excédera pas celle que l'on peut mesurer avec la double toise OP.

Mais lorsque les autres objets seront trop éloignés, ou que la différence du niveau sera trop grande, on prendra à la seconde station l'un des points qu'on a nivelés à la premiere, afin d'y comparer les autres, et l'on se placera autant qu'on le pourra en un lieu qui soit à-peu-près également éloigné de ce point et des autres..

Si on ne pouvoit pas se placer à distances égales, ou à-peu-près égales des points qu'on veut niveler, alors la différence du niveau entre deux points quelconques ne seroit pas exprimée par la différence des hauteurs de la ligne de mire à chaque point, parceque la différence du niveau vrai au niveau apparent n'est la même qu'à des distances égales : c'est pourquoi il faudroit, de la hauteur observée pour chaque point, retrancher la *correction du niveau*, c'est-à-dire, la différence du niveau vrai au niveau apparent.

Par exemple, si la mire est placée à 250 toises ou 1500 pieds, et que l'on ait trouvé $4^p\ 8^{po}$ pour la hauteur de la ligne de mire, au lieu de $4^p\ 8^{po}$, on ne comptera que $4^p\ 7^{po}\ 4^l$, en retranchant 8 lignes qui est la correction du niveau trouvé par ce qui a été dit (315 et 316).

Pour donner quelque application, nous supposerons qu'il soit question de *lever et de tracer le profil d'un ouvrage de fortification* AGHIOP (fig. 223).

On imaginera cet ouvrage coupé par un plan vertical AA'P'P, dans lequel on concevra, à une hauteur arbitraire AA', une ligne horizontale A'P'

De tous les angles A, B, C, D, E, etc., on imaginera les verticales AA', BB', CC', DD' EE', etc.; on mesurera immédiatement les distances horizontales qui séparent ces verticales.

A l'égard des distances verticales, on placera le niveau sur le terre-plein BC du rempart, et la mire successivement à chacun des angles A, B, C, D, E, pour déterminer les hauteurs A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*; et ayant retranché la premiere de la hauteur AA' de la ligne arbitraire A'P', on ajoutera les autres au reste A'*a*, et l'on aura les verticales B'B, C'C, etc. jusqu'en E.

On placera ensuite le niveau sur le parapet, et la mire successivement aux points E, F, G, pour avoir les différences du niveau E*e*, F*f*, G*g*. On retranchera la premiere de EE', et ajoutant les autres au reste, on aura les verticales FF', GG'.

On se conduira de la même maniere pour la partie KLMNOP, en plaçant le niveau sur le glacis.

A l'égard de la partie GHIK, comme les points H et I sont trop bas pour qu'on puisse faire usage de la double toise, le moyen le plus simple est de suspendre un poids à un cordeau, attaché au bout d'une perche, que l'on posera horizontalement en G et en K, de maniere que ce poids descende aux pieds H de l'escarpe, et I de la contrescarpe, et de mesurer la longueur du cordeau dans chaque position. On ajoutera la premiere à GG, et la seconde à KK', pour avoir HH' et II'.

Toutes ces distances, tant horizontales que verticales, étant ainsi mesurées, on formera facilement le profil, en tirant sur le papier une ligne pour représenter A'P : portant successivement sur cette ligne des nombres de parties de l'échelle égaux aux nombres de mesures trouvées pour les distances horizontales, et élevant à l'extrémité de chacune une perpendiculaire à laquelle on donne autant de parties de l'échelle qu'on a trouvé de mesures pour la distance verticale correspondante.

Joignant les extrémités de ces verticales, on a le profil demandé.

Si l'on trouvoit quelque difficulté à mesurer les distances horizontales; par exemple, pour le talus intérieur AB, on mesureroit la longueur absolue de ce talus; et le triangle rectangle AQB, dont on connoît AB par la mesure actuelle, et QB par le nivellement, donneroit AQ, pages 92 et 93.

Le nivellement a encore d'autres usages : nous ne les parcourrons pas ici, mais nous nous en occuperons dans le Traité de pratique qui terminera ce Cours. Nous y ferons connoître aussi quelques autres especes de niveau.

318. On emploie à cet effet un instrument tel que le

représente la figure 164. C'est un tuyau creux de fer-blanc ou d'un autre métal, coudé en A et en B. Dans les deux parties éminentes et égales AC, BD, on fait entrer deux tuyaux de verre I et K, mastiqués avec les parties AC et BD. On remplit d'eau tout le canal, jusqu'à ce qu'elle s'éleve dans es deux tuyaux de verre : quand elle est à égale hauteur lans chacun, on est sûr que la ligne qui passe par la superficie de l'eau élevée dans chacun de ces deux tuyaux est une igne horizontale, et on l'emploie de la maniere suivante.

On fait plusieurs stations, par exemple, aux points D, C, B (fig. 165) : ayant fait élever aux deux points A et N leux jallons, l'observateur, qui est en D, vise successivement à chacun de ces deux jallons, et fait marquer les deux points E et F, qu'on nomme points de *mire*. Faisant ensuite planter un autre jallon en quelque point P au-delà de C, on fait marquer de même les deux points de mire G et H; on mesure à chaque station les hauteurs AE, GF, IH, etc., et après leur avoir appliqué (316) la correction de niveau qui convient aux distances KE, KF, LG, etc. estimées grossièrement, on ajoute ces hauteurs, et on a la différence de niveau entre A et B.

Si dans le cours de ces opérations on n'alloit pas toujours en montant, on sent bien qu'au lieu d'ajouter il faudroit retrancher les quantités dont on a descendu.

Comme nous ne nous proposons pas de donner ici un traité détaillé du nivellement, nous ne nous arrêterons pas à décrire les autres méthodes et les autres instruments qu'on peut employer.

On peut voir, sur cette matiere, le *Traité du Nivellement* de M. Picard; Paris, 1728.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

319. Un triangle sphérique est une partie de la surface de la sphere, comprise entre trois arcs de cercle, qui ont tous trois pour centre commun le centre de la sphere, et qui sont par conséquent trois arcs de grands cercles de cette même sphere.

Si des trois angles A, F, G du triangle sphérique AFG (fig. 166) on imagine trois rayons AC, FC, GC menés au centre C de la sphere, on peut se représenter l'espace CAFG comme une pyramide triangulaire qui a son sommet C au centre de la sphere, et dont la base AFG est courbe, et fait partie de la surface de cette sphere. Les arcs AF, FG, AG, qui sont les côtés curvilignes de la base, sont les rencontres de la surface de la sphere avec les plans ACF, FCG, GCA qui forment les faces de cette pyramide.

L'angle A compris entre les deux arcs AF, AG, se mesure par l'angle rectiligne IAK compris entre les tangentes AI, AK de ces deux arcs. Chacune de ces tangentes est dans le plan de l'arc auquel elle appartient, et elles sont toutes deux perpendiculaires au rayon CA (48), qui est l'intersection des deux plans ACF, ACG, donc (191) l'angle compris entre ces deux tangentes est le même que l'angle compris entre les plans ACF, ACG des deux arcs; donc,

320. 1° *Un angle sphérique quelconque* FAG *n'est autre chose que l'angle compris entre les plans de ses deux côtés* AF, AG.

321. 2° *Les angles que forment les arcs de grand cer*

qui se rencontrent sur la surface d'une sphere, ont les mêmes propriétés que les angles plans, c'est-à-dire, les propriétés énoncées (192, 193 et 194).

322. Donc *deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entre eux, quand les plans qui les renferment sont perpendiculaires entre eux.*

Si l'on conçoit les deux plans ACG, ACF prolongés indéfiniment dans tous les sens, il est visible que la section que chacun formera dans la sphere sera un grand cercle, et que ces deux grands cercles se couperont mutuellement en deux parties égales aux points A et D de l'intersection commune AC prolongée; car les deux plans, passant par le centre, ont pour intersection commune un diametre de la sphere.

323. Donc *deux côtés contigus* AG, AF *d'un triangle sphérique ne peuvent plus se rencontrer qu'à une distance* AGD *ou* AFD *de* 180° *depuis leur origine.*

324. Si l'on prend les deux arcs AB, AE chacun de 90°, et que par les deux points B et E et le centre C on conduise un plan dont la section avec la sphere forme le grand cercle BENMO, je dis que ce cercle sera perpendiculaire aux deux cercles ABD, AED.

Car, si l'on tire les rayons BC, EC, les angles ACB, ACE, qui ont pour mesure les arcs AB, AE de 90° chacun, seront droits; donc la ligne AC est perpendiculaire aux deux droites CE, BE; donc (180) elle est perpendiculaire à leur plan, c'est-à-dire, au cercle BENMO; donc les deux cercles AED, ABD, qui passent par la droite AD, sont aussi perpendiculaires à ce même cercle (184); donc réciproquement ce cercle leur est perpendiculaire.

Comme nous n'avons supposé aucune grandeur déterminée à l'angle GAF ou EAB, il est visible que la même chose aura toujours lieu, quelle que soit la grandeur de cet angle, et que par conséquent le cercle BENMO est perpendiculaire à tous les cercles qui passent par la droite AD.

La droite AD s'appelle *l'axe du cercle* BENMO, et les

deux points A et D, qui sont chacun sur la surface de la sphere, sont dits les *pôles* de ce même cercle.

325. Concluons donc, 1° *que les pôles d'un grand cercle quelconque sont également éloignés de tous les points de la circonférence de ce grand cercle; et leur distance à chacun de ces points, mesurée par un arc de grand cercle, est un arc de* 90°.

Et réciproquement, *si un point quelconque* A *de la surface de la sphere se trouve éloigné de* 90° *de deux points* B *et* E *pris dans un arc de grand cercle, ce point* A *est le pôle de ce grand cercle.*

326. 2° Que *quand un arc* BF *de grand cercle est perpendiculaire sur un autre arc* BE *de grand cercle, il passe nécessairement par le pôle de celui-ci, ou du moins il y passeroit, étant prolongé suffisamment.*

327. 3° Que *si deux arcs* BF, EG *de grand cercle sont perpendiculaires à un troisieme arc de grand cercle* BE, *le point* A, *où ils se rencontrent, est le pôle de celui-ci.*

328. Puisque les deux droites BC, EC sont perpendiculaires au même point C de la droite AD, l'angle BCE qu'elles forment est donc (191) la mesure de l'inclinaison des deux plans ABD, AED, ou de l'angle sphérique EAB ou GAF; donc,

Un angle sphérique GAF *a pour mesure l'arc* BE *de grand cercle, que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, comprennent à la distance de* 90° *depuis le sommet.*

329. Si l'on conçoit que le demi-cercle ABD tourne autour du diametre AD, et que de différents points R, B, H de sa circonférence on abaisse sur AD les perpendiculaires RQ, BC, HP, il est évident,

1° Que *chacun de ces points décrit une circonférence de cercle, qui a pour centre le point de* AD *sur lequel tombe cette perpendiculaire, et pour rayon cette perpendiculaire même.*

2° Que *les arcs* RS, BE, HL, *décrits dans ce mouvement et interceptés entre les deux plans* ABD, AED, *sont tous*

d'un même nombre de degrés; car si l'on tire les lignes SQ, EC, LP, elles seront toutes perpendiculaires sur AD, puisqu'elles ne sont autre chose que les rayons RQ, BC, HP parvenus dans le plan AED; donc (191) chacun des angles RQS, BCE, HPL, ou chacun des arcs RS, BE, HL, mesure l'inclinaison des deux plans ABD, AED; donc tous ces arcs sont d'un même nombre de degrés.

3° *Les longueurs de ces arcs* RS, BE, HL *sont proportionnelles aux sinus des arcs* AR, AB, AH, *qui mesurent leurs distances à un même pôle* A, *ou, ce qui revient au même, aux cosinus de leurs distances au grand cercle auquel ils sont paralleles*; car il est évident que ces arcs étant semblables, sont proportionnels à leurs rayons RQ, BC, HP, qui sont évidemment les sinus des arcs AR, AB, AH, ou les cosinus des arcs BR, o, et BH.

330. Si l'on imagine que la sphere ABDMOBN représente la terre, et AD son axe, ou celui de ses diametres autour duquel elle fait sa révolution journaliere, le cercle BENMO, également éloigné des deux pôles A et D, est ce qu'on appelle l'*équateur*. Les cercles ABD, AED et tous leurs semblables, dont les plans passent par l'axe AD, se nomment des *méridiens*; les petits cercles dont RS, HL représentent ici des parties, se nomment des *paralleles à l'équateur*, ou simplement des *paralleles*. Les arcs BH, EL, qui mesurent la distance d'un parallele jusqu'à l'équateur, s'appellent la *latitude* de ce parallele ou d'un lieu qui seroit situé sur sa circonférence.

Pour déterminer la position d'un lieu sur la terre, on le rapporte à deux cercles fixes perpendiculaires entre eux, tels que ABDM, BNEMO en cette maniere. On prend pour cercle de comparaison un méridien ABDM qui passe par un lieu connu et déterminé; et pour fixer la position d'un autre lieu L, on imagine par celui-ci un autre méridien AELD. Il est visible que la position de ce méridien est connue, si l'on sait quel est le nombre de degrés de l'arc BE compris entre le point B, et le point E où ce même méridien

rencontre l'équateur. Le point B étant donc le point fixe auquel on rapporte tous les autres méridiens, l'arc BE s'appelle alors la *longitude* (1) du méridien AED, et de tous les lieux situés sur ce même méridien : il ne s'agit donc plus, pour déterminer la position du lieu L, que de connoître le nombre des degrés de l'arc EL; ce qu'on appelle la *latitude* du lieu L, et qui est aussi la latitude de tous les lieux situés sur le parallele dont HL fait partie.

On voit par là que tous les lieux situés sur un même méridien ont une même longitude, et que tous ceux qui sont situés sur un même parallele ont une même latitude; mais il n'y a qu'un seul point L, au moins dans une même moitié de la sphere ou dans un même hémisphere, qui puisse avoir en même temps une longitude et une latitude proposées. La position d'un lieu est donc déterminée, quand on connoît sa longitude et sa latitude; mais pour la latitude, il faut savoir de plus vers quel pôle on la compte. Ainsi, supposant que le pôle A soit celui du midi ou le pôle *austral*, et D le pôle du nord ou le pôle *boréal*, il faut savoir si la latitude est australe ou boréale; car on conçoit aisément qu'il peut y avoir et qu'il y a en effet un point dans l'hémisphere austral, qui est situé de la même maniere que le point L l'est dans l'hémisphere boréal.

La longueur terrestre d'un degré de grand cercle est de 20 lieues marines, c'est-à-dire, de 20 lieues de 2853 toises chacune : ainsi, si l'on s'avance sur l'équateur, à chaque 20 lieues on change d'un degré en longitude; et si l'on marche sur un même méridien, à chaque 20 lieues on change d'un degré en latitude. Mais si l'on marche sur un parallele à l'équateur, il est évident qu'à chaque 20 lieues on change de plus d'un degré en longitude, et d'autant plus que le pa-

(1) On est dans l'usage de compter les longitudes d'occident en orient ; le cercle d'où l'on part pour compter les longitudes, s'appelle *premier méridien*; les Français ont choisi celui qui passe par l'isle de Fer, la plus occidentale des Canaries.

rallele sur lequel on s'avance est plus éloigné de l'équateur, c'est-à-dire, est par une plus grande latitude. Pour trouver à combien de degrés de longitude répond un certain nombre de lieues HL parcourues sur un parallele connu, il faut faire cette proportion : *Le cosinus de la latitude est au rayon, comme le nombre de lieues parcourues sur le parallele est à un quatrieme terme* qui sera le nombre de lieues de l'arc correspondant BE de l'équateur qui marque le changement en longitude. C'est une suite immédiate de ce qui a été dit (329). Par exemple, supposant que par la latitude de 47° 20′ on ait couru 18 lieues sur un parallele à l'équateur, si l'on demande combien on a changé en longitude, on fera cette proportion, *cos* 47° 20′ ou *sin* 42° 40′ : R :: 18ˡ est à un quatrieme terme qu'on trouvera de 26ˡ,56, lesquelles étant divisées par 20, à raison de 20 lieues par degré, donnent 1°,328 ou 1° 19′ 41″ à-peu-près pour le changement en longitude.

Revenons aux propriétés de la sphere.

331. Supposons que AFIG, BFHG (fig. 167) sont deux grands cercles de la sphere, et ABDEIH un troisieme grand cercle qui coupe perpendiculairement ces deux là ; il suit de ce qui a été dit (326), que le grand cercle ABDEIH passe par les pôles des deux cercles AFIG, BFHG ; soient D et E ces pôles, et DK, EL les deux axes ; puisque les angles ACD, BCE sont droits, si de chacun on retranche l'angle commun BCD, les angles restants ACB, DCE seront égaux, et par conséquent aussi les arcs AB, DE ; donc *l'arc* DE, *qui mesure la plus courte distance des pôles de deux grands cercles, est égal à l'arc* AB *qui mesure le plus petit des deux angles que l'un de ces cercles fait avec l'autre.*

Propriétés des Triangles sphériques.

332. Il est évident que par deux points pris sur la surface d'une sphere, on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle ; car ce grand cercle est l'intersection de la

sphere par un plan qui est assujetti à passer par le centre : or, il est évident que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul plan.

333. Quoiqu'un triangle sphérique puisse avoir quelques unes de ses parties de plus de 180°, néanmoins nous ne considérerons que ceux dont chacune des parties est moindre que 180°, parcequ'on peut toujours connoître l'un de ces triangles par l'autre. Par exemple, si l'on se représente le triangle ABEMV (fig. 166) formé par les arcs quelconques AB, AV, et par l'arc BMV de plus de 180° ; en imaginant le cercle entier BMVB, on pourra substituer le triangle BOVA, dont l'arc BOV est moindre que 180°, au triangle ABEMV, parceque les parties du premier sont, ou égales à celles du second, ou leur supplément à 180° ou à 360° ; en sorte que l'un de ces triangles est connu par l'autre.

334. *Chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres.*

Cela est évident.

335. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que 360°.*

Car il est évident (334) que FG est plus petit que AG + AF : or, AG + AF ajoutés avec DG + DF, ne font que 360° ; donc AG + AF ajoutés avec FG, feront moins que 360°.

336. *Soit* ABC (fig. 168) *un triangle sphérique quelconque* : DEF *un autre triangle sphérique tel que le point* A *soit le pôle de l'arc* EF : *le point* C, *le pôle de l'arc* DE, *et le point* B, *le pôle de l'arc* DF ; *chaque côté du triangle* DEF *sera supplément de l'angle qui lui est opposé dans le triangle* ABC, *et chaque angle de ce même triangle* DEF *sera supplément du côté qui lui est opposé dans le triangle* ABC.

Car, puisque le point A est le pôle de l'arc EF, le point E doit être éloigné du point A de 90° (325) : par la même raison, puisque C est le pôle de l'arc DE, le point E doit être à 90° du point C : donc (325) le point E est le pôle de l'arc

AC; on prouvera de même que D est le pôle de BC, et F le pôle de AB.

Cela posé, prolongeons les arcs AC, AB jusqu'à ce qu'ils rencontrent l'arc EF en G et H. Puisque le point E est pôle de ACG, l'arc EG est de 90°; et puisque F est pôle de ABH, l'arc FH est de 90°; donc EG + FH ou EG + FG + GH ou EF + GH est de 180°: or, GH est la mesure de l'angle A (328), puisque les arcs AG, AH sont de 90°; donc EF + A est de 180°; donc EF est supplément de l'angle A. On prouvera de la même maniere que DE est supplément de C, et DF supplément de B.

Prolongeons l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre DF en I. Les deux arcs AH et BI sont chacun de 90°, puisque A et B sont les pôles des arcs EF, DF; donc AH + BI ou AH + AB + AI ou HI + AB est de 180°; mais HI est la mesure de l'angle F (328), puisque le point F est pôle de HI; donc F + AB est de 180°; donc F est supplément de AB. On prouvera de même que E est supplément de AC, et D supplément de BC.

337. Concluons de là que *la somme des trois angles d'un triangle sphérique vaut toujours moins que* 540°, *ou que trois fois* 180°, *et plus que* 180°.

Car la somme des trois angles A, B, C avec la somme des trois côtés EF, DF, DE vaut trois fois 180° (336); donc, 1° la somme des trois angles A, B, C est moindre que trois fois 180° ou que 540°; 2° la somme des trois côtés EF, DF, DE est (335) moindre que 360°, ou deux fois 180°; donc il reste plus de 180° pour la somme des trois angles A, B, C.

338. *Un triangle sphérique peut donc avoir ses trois angles droits, et même ses trois angles obtus.*

On voit donc que la somme des trois angles d'un triangle sphérique n'est pas une quantité qui soit toujours la même, comme dans les triangles rectilignes, et par conséquent on ne peut pas, de deux angles connus, conclure le troisieme.

339. Comme les parties du triangle DEF sont chacune supplément de celle qui lui est opposée dans le triangle ABC,

il s'ensuit que l'un de ces triangles peut être résolu par l'autre, puisque connoissant les parties de l'un, on a celles de l'autre. Nous ferons usage de cette remarque; et comme les deux triangles ABC, DEF reviendront souvent, nous nommerons le triangle DEF *triangle supplémentaire*, pour abréger le discours.

340. *Deux triangles sphériques tracés sur une même sphere, ou sur des spheres égales, sont égaux*, 1° *lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun*; 2° *lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun*; 3° *lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun*; 4° *lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.*

Les trois premiers cas se démontrent précisément de la même maniere que pour les triangles rectilignes. (*Voyez* 80, 81 et 83.)

A l'égard du quatrieme, comme il n'a pas lieu pour les triangles rectilignes, il exige une démonstration à part. La voici.

Concevez que pour chacun des deux triangles ABC et *abc* (fig. 168 et 169) on ait tracé le triangle supplémentaire DEF et *def*. Si les angles A, B, C sont égaux aux angles *a*, *b*, *c* chacun à chacun, les côtés EF, DF, DE, suppléments des premiers angles, seront donc égaux aux côtés *ef*, *df*, *de*, suppléments des derniers; donc, par le troisieme des quatre cas qu'on vient d'énoncer, ces deux triangles DEF et *def* seront parfaitement égaux; donc les angles D, E, F seront égaux aux angles *d*, *e*, *f* chacun à chacun; donc les côtés BC, AC, AB, suppléments de ces trois premiers angles, seront égaux aux côtés *bc*, *ac*, *ab*, suppléments des trois derniers.

341. *Dans un triangle sphérique isocele, les deux angles opposés aux côtés égaux sont égaux: et réciproquement, si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux.*

Prenez sur les côtes egaux AB, AC (fig. 170) les arcs

égaux AD, AE, et concevez les arcs de grand cercle DC, BE ; les deux triangles ADC, AEB, qui ont alors un angle commun compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, seront égaux (340). Donc l'arc BE est égal à l'arc CD ; donc les deux triangles BDC et BEC sont égaux, puisque, outre DC égal à BE, comme on vient de le voir, ils ont de plus le côté BC commun, et que d'ailleurs les parties BD, CE sont égales, puisque ce sont les restes de deux arcs égaux AB, AC, dont on a retranché des arcs égaux AD, AE. De ce que ces deux triangles sont égaux, on peut donc conclure que l'angle DCB ou ABC est égal à l'angle ECB ou ACB.

Quant à la seconde partie de la proposition, elle est une suite de la premiere, en imaginant le triangle supplémentaire; car, si les deux angles B et C (fig. 168) sont égaux, leurs suppléments DF, DE seront égaux ; le triangle DEF sera donc isocele; donc les angles E et F seront égaux; donc leurs suppléments AC et AB seront égaux.

342. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 171), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement.*

Si l'angle B est plus grand que l'angle A, on pourra conduire en dedans du triangle un arc BD de grand cercle, qui fasse l'angle ABD égal à l'angle BAD, et alors BD sera égal à AD (341) : or, BD + DC est plus grand que BC; donc aussi AD + DC ou AC est plus grand que BC.

La réciproque se démontrera facilement et d'une maniere analogue, en employant le triangle supplémentaire.

Les dernieres propositions que nous venons d'établir sont utiles pour se diriger dans la résolution des triangles sphériques, où tout ce que l'on cherche se détermine par des sinus ou des tangentes, qui, appartenant indifféremment à des arcs plus petits que 90°, ou à leurs suppléments, peuvent souvent laisser dans l'incertitude sur celui de ces deux arcs qu'on doit adopter; mais ces connoissances ne sont pas suffisantes pour découvrir dans quels cas ce que l'on cherche doit être plus grand ou plus petit que 90°, et dans

quels cas il peut être indifféremment plus grand ou plus petit.

Moyens de reconnoître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche dans les Triangles sphériques rectangles doivent être plus grands ou plus petits que 90°.

343. Quoique deux angles, et même les trois angles d'un triangle sphérique rectangle puissent être droits, et que par conséquent il puisse y avoir deux et trois hypothénuses, néanmoins nous n'appellerons *hypothénuse* que le côté opposé à l'angle droit que nous considérerons, et nous appellerons les deux autres angles *angles obliques*.

344. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle sphérique rectangle est de même espece que le côté qui lui est opposé, c'est-à-dire, qu'il est de* 90°, *si ce côté est de* 90°, *et plus grand ou plus petit que* 90°, *selon que ce côté est plus grand ou plus petit que* 90°.

Que B (fig. 172) soit l'angle droit; si BC est moindre que 90°, en le prolongeant jusqu'en D, de maniere que BD soit de 90°, le point D sera le pôle de l'arc AB (326); donc l'arc de grand cercle DA, conduit à l'extrémité du côté BA, sera perpendiculaire sur BA; donc l'angle DAB sera droit; donc CAB est moindre que 90°. On prouvera d'une maniere semblable les deux autres cas.

345. *Si les deux côtés ou les deux angles d'un triangle sphérique rectangle sont tous deux plus petits ou tous deux plus grands que* 90°, *l'hypothénuse sera toujours plus petite que* 90°; *et au contraire, elle sera plus grande que* 90°, *si les deux côtés ou les deux angles sont de différente espece.*

Car, en supposant la même construction que dans la proposition précédente, si AB est aussi moindre que 90°, l'angle ADB, qui doit (344) être de même espece que le côté AB, sera moindre que 90°; par la même raison, l'angle ACB sera moindre que 90°; donc ACD sera obtus, et

par conséquent plus grand que ADC; donc AD sera plus grand que AC (342) : or, AD est de 90°; donc AC est moindre que 90°.

Pareillement, si les deux côtés BC et AB de l'angle droit B (fig. 173) sont tous deux plus grands que 90°, l'hypothénuse AC sera encore plus petite que 90°; car, si l'on prend BD de 90°, D étant le pôle de l'arc AB, DA sera de 90° : or, puisque AB est de plus de 90°, l'angle ACB sera obtus (344); il en sera de même, et par la même raison, de l'angle ADB; donc ADC est aigu, et par conséquent plus petit que ACD; donc aussi AC sera plus petit que AD (342), c'est-à-dire, moindre que 90°.

Au contraire, si AB (fig. 174) est moindre que 90°, et BC plus grand; alors l'angle ACB, qui est de même espece que AB (344), sera aigu; il en sera de même de l'angle ADB; donc ADC sera obtus, et par conséquent plus grand que ACD; donc AC sera plus grand que AD, c'est-à-dire, plus grand que 90°.

Quant aux angles comparés à l'hypothénuse, la vérité de cette proposition suit de ce que ces angles sont chacun de même espece que le côté qui lui est opposé (344).

346. *Selon que l'hypothénuse sera plus petite ou plus grande que* 90°, *les côtés seront de même espece ou de différente espece entre eux ; et il en sera de même des angles obliques.*

347. *Selon que l'hypothénuse et un côté seront de même ou de différente espece, l'autre côté sera plus petit ou plus grand que* 90°; *et il en sera de même de l'angle opposé à ce dernier côté.*

Principes pour la Résolution des Triangles sphériques rectangles.

348. La résolution des triangles sphériques rectangles ne dépend que de trois principes que nous allons exposer successivement, et que nous éclaircirons ensuite par des

exemples. Le premier de ces principes est commun aux triangles rectangles et aux triangles obliquangles.

Chaque cas des triangles sphériques rectangles peut être résolu par une seule proportion, que l'on trouvera toujours par l'un ou l'autre des trois principes suivants.

349. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 175), *on a toujours cette proportion : Le sinus d'un des angles est au sinus du côté opposé à cet angle, comme le sinus d'un autre angle est au sinus du côté opposé à celui-ci.*

Soit H le centre de la sphere, BH, AH, CH trois rayons: du sommet de l'angle A, abaissons sur le plan du côté opposé BC la perpendiculaire AD, et par cette ligne conduisons deux plans ADE, ADF, de maniere que les rayons BH, CH leur soient perpendiculaires respectivement; les lignes AE, DE, sections des deux plans ABH, CBH, avec le plan ADE, seront perpendiculaires sur l'intersection commune AH de ces deux plans, et par conséquent l'angle AED sera l'inclinaison de ces deux plans (191); donc il sera égal à l'angle sphérique ABC (320); par la même raison, l'angle AFD sera égal à l'angle sphérique ACB.

Cela posé, les deux triangles ADE, ADF étant rectangles en D, on aura (295) :

$$R : \sin AED :: AE : AD$$
$$\text{et } \sin AFD : R :: AD : AF;$$

donc (100) $\sin AFD : \sin AED :: AE : AF.$

Or, les lignes AE, AF étant des perpendiculaires abaissées de l'extrémité A des arcs AB, AC sur les rayons BH, CH qui passent par l'autre extrémité de ces arcs, sont (269) les sinus de ces mêmes arcs: donc, et à cause que les angles AED et AFD sont égaux aux angles B et C, on a enfin $\sin C : \sin B :: \sin AB : \sin AC.$

On démontreroit de la même maniere que $\sin C : \sin A :: \sin AB : \sin BC.$

350. Si l'un des angles comparés est droit, comme son

sinus est alors égal au rayon (274), la proportion peut être énoncée ainsi : *Le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé.*

351. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique opposé à l'autre côté de l'angle droit est à la tangente de ce même côté.*

Soit B (fig. 176) l'angle droit : de l'extrémité C du côté BC, menons CI perpendiculaire sur le rayon BD de la sphere ; et par cette droite CI, conduisons le plan CIE de maniere que le rayon DA lui soit perpendiculaire. Alors l'angle IEC sera égal à l'angle sphérique A ; et puisque les deux plans DBC, DBA sont supposés perpendiculaires entre eux, la ligne CI, perpendiculaire à leur commune section DB, sera (185) perpendiculaire au plan DBA, et par conséquent (178) à la droite IE.

Cela posé, dans le triangle rectangle DIC on a (296) DI : CI :: R : *tang* IDC; et dans le triangle rectangle EIC on a, par le même principe,

$$CI : IE :: tang\, IEC : R;$$

donc (100) DI : IE :: *tang* IEC : *tang* IDC ou :: *tang* A : *tang* BC, puisque l'angle IDC a pour mesure l'arc BC. Or, dans le triangle rectangle IED on a (295) DI : IE :: R : *sin* IDE ou *sin* AB; donc, à cause du rapport commun de DI à IE, on aura R : *sin* AB :: *tang* A : *tang* BC.

352. *Dans tout triangle sphérique rectangle* ABC (fig. 177), *si l'on prolonge les deux côtés* BC, AC, *d'un des angles obliques, jusqu'en* D *et* E, *de maniere que* BD, AE *soient chacun de* 90°, *et qu'on joigne les extrémités* D *et* E *par un arc de grand cercle* DE, *on aura un nouveau triangle* CED *rectangle en* E, *dont les parties seront, ou égales à celles du triangle* ABC, *ou leur complément.*

Imaginons les côtés AB et DE prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; puisque BD est de 90°, et perpendi-

culaire sur AB, le point D est le pôle de l'arc AB (326); donc DF est de 90°, et perpendiculaire sur AF; par la même raison, DA est de 90°.

Puisqu'on a fait AE de 90°, et que DA est aussi de 90°, le point A est le pôle de DF (325); donc AE est perpendiculaire sur DF, et par conséquent le triangle CED est rectangle en E.

Cela posé, il est évident que l'angle E est égal à l'angle B; que l'angle DCE est égal à l'angle ACB (321); que le côté DC est complément de CB; que DE, complément de EF qui (328) est la mesure de l'angle CAB, est complément de cet angle CAB; que CE est complément de AC, et que l'angle D, qui (328) a pour mesure BF complément de AB, est complément de AB; donc, en effet, les parties du triangle DCE sont, ou égales aux parties du triangle ACB, ou sont leur complément.

On démontreroit la même chose du triangle AHI, qu'on formeroit en prolongeant de même au-dessus de A les côtés BA et AC de l'angle oblique BAC, jusqu'à ce qu'ils fussent de 90° chacun.

353. On voit donc que dès qu'on connoît trois choses dans le triangle ABC, on connoît aussi trois choses dans chacun des deux triangles CED, AHI. On voit en même temps que les trois autres parties qui resteroient à trouver dans le triangle ABC feroient connoître les trois autres parties de chacun de ces deux triangles CED, AHI, et réciproquement.

Donc, lorsqu'ayant à résoudre le triangle ABC on ne pourra faire usage immédiatement ni de l'un ni de l'autre des deux principes posés (349 et 351), on aura recours à l'un ou à l'autre des deux triangles CED, AHI; et alors l'application de l'un ou de l'autre de ces deux principes aura lieu, et fera connoître les parties de ces triangles, qui donneront ensuite la connoissance des parties du triangle ABC, par le principe qu'on vient de poser en dernier lieu.

Nous nommerons dorénavant les triangles CED, AHI *triangles complémentaires.*

Si les côtés AB, AC, ou AC, BC, que la proposition démontrée (352) suppose tous deux plus petits que 90°, étoient tous deux plus grands, ou l'un plus grand et l'autre plus petit que 90°, comme il arrive dans le triangle FBC (fig. 178); au lieu de calculer ce triangle FBC, on calculeroit le triangle ABC formé par les arcs FC, FB prolongés jusqu'à 180° : les parties de celui-ci étant connues, feroient connoître celles du triangle FBC. Au reste, il n'est pas indispensable d'avoir recours à cet expédient; la proportion que donnera la figure 177 a toujours lieu, soit que les parties du triangle soient plus petites que 90°, soit qu'elles soient plus grandes.

Remarquons, à l'égard des triangles sphériques rectangles, comme nous l'avons fait pour les triangles rectilignes rectangles, que l'angle droit étant un angle connu, il suffit, pour être en état de résoudre un triangle rectangle, de connoître deux choses outre l'angle droit. Passons aux exemples.

EXEMPLE I. Supposons le côté BC de 15° 17′, l'angle A de 23° 42′; on demande l'hypothénuse AC.

Pour trouver l'hypothénuse, on peut faire immédiatement usage du principe donné (349), en faisant cette proportion, *sin* A : *sin* BC :: R : *sin* AC, qui n'est autre chose que la proportion énoncée (350), mais dont on a transposé les deux rapports. Cette proportion, dans le cas présent, revient à *sin* 23° 42′ : *sin* 15° 17′ :: R : *sin* AC.

Opérant par logarithmes, on a :

Log sin 15° 17′.	9,4209330
Log du rayon.	1 . . . . .
Complément arith. du *log sin* de 23° 42′.	0,3958304
Somme ou *log sin* AC.	19,8167634

qui, dans les tables, répond à 40° 59′; en sorte que l'hypothénuse AC est de 40° 59′, si elle doit être moindre que de

Soit G le centre de la sphere : du sommet de l'angle A, abaissons sur le plan BGC de l'arc BC la perpendiculaire AI; elle sera dans le plan AGD de l'arc AD. Conduisons par AI les deux plans AIE, AIF, de maniere que les rayons GB, GC leur soient respectivement perpendiculaires; et du point D, menons les perpendiculaires DH, DK sur les mêmes rayons.

Les triangles GIE, GDH seront semblables, à cause des lignes IE, DH perpendiculaires sur GB; par une raison semblable, les triangles GDK, GIF sont semblables. On a donc ces deux proportions :

GH : GE :: GD : GI
et GK : GF :: GD : GI.

Donc, à cause du rapport commun de GD à GI, on a GH : GE :: GK : GF. Or, GH est le cosinus de BD (270), GE le cosinus de AB, GK le cosinus de GD, et GF celui de AC; donc *cos* BD : *cos* AB :: *cos* CD : *cos* AC, ou en mettant le troisieme terme à la place du second, et le second à la place du troisieme,

cos BD : *cos* CD :: *cos* AB : *cos* AC.

358. *Les mêmes choses étant supposées que dans la proposition précédente, on a cette autre proportion : Le sinus de* BD *est au sinus de* CD, *comme la cotangente de l'angle* B *est à la cotangente de l'angle* C.

Car les angles AEI, AFI sont égaux aux angles B et C chacun à chacun, ainsi que nous l'avons vu dans la démonstration du n° 349; donc, puisque les triangles AIE, AIF sont rectangles, les angles EAI, FAI sont complémens des angles AEI, AFI, et par conséquent des angles B et C.

Cela posé, dans le triangle AEI, on a (296) R : *tang* EAI ou *cot* B :: AI : IE; et dans le triangle rectangle AIF, on a *tang* IAF ou *cot* C : R :: IF : AI; donc (100) *cot* C : *cot* B :: IF : IE.

Mais les triangles semblables GFI, GKD, et les triangles semblables GEI, GHD donnent :

$$IF : DK :: GI : GD$$
$$\text{et } IE : DH :: GI : GD;$$
$$\text{donc } IF : DK :: IE : DH$$
$$\text{ou } IF : IE :: DK : DH.$$

Donc aussi *cot* C : *cot* B :: DK : DH. Or, DK et DH sont les sinus des segments DC et DB ; donc enfin *cot* C : *cot* B :: *sin* DC : *sin* DB.

359. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 180), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC, *on a cette proportion : La tangente de la moitié du côté* BC *est à la tangente de la moitié de la somme des deux autres côtés, comme la tangente de la moitié de leur différence est à la tangente de la moitié de la différence des deux segments* CD, BD, *ou* (fig. 181) *à la tangente de la moitié de leur somme.*

On vient de voir (357) que *cos* AB : *cos* AC :: *cos* BD : *cos* CD ; donc (98) *cos* AB + *cos* AC : *cos* AB — *cos* AC :: *cos* BD + *cos* CD : *cos* BD — *cos* CD ; mais (287) *cos* AB + *cos* AC : *cos* AB — *cos* AC :: $cot \frac{AC+AB}{2} : tang \frac{AC-AB}{2}$; et par la même raison, *cos* BD + *cos* CD : *cos* BD — *cos* CD :: $cot \frac{CD+BD}{2} : tang \frac{CD-BD}{2}$; donc $cot \frac{AC+AB}{2} : tang \frac{AC-AB}{2} :: cot \frac{CD+BD}{2} : tang \frac{CD-BD}{2}$, ou $cot \frac{AC+AB}{2} : cot \frac{CD+BD}{2} :: tang \frac{AC-AB}{2} : tang \frac{CD-BD}{2}$, ou, à cause que (280) les cotangentes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes, $tang \frac{CD+BD}{2} : tang \frac{AC+AB}{2} :: tang \frac{AC-AB}{2} : tang \frac{CD-BD}{2}$. Or, dans la figure 180, CD + BD est BC ; et dans la figure 181, CD — BD est BC ; donc, pour la figure 180, on a $tang \frac{BC}{2} : tang \frac{AC+AB}{2} :: tang$

le complément, ne peut être que 58° 39′; car les deux côtés AB, AC étant de même espece, l'hypothénuse doit (345) être moindre que 90°.

Exemple V. Les mêmes choses étant données, pour trouver l'angle C ou l'angle A, on appliquera directement la proposition (351), qui pour l'angle A donne R : *sin* AB :: *tang* A : *tang* BC, ou *sin* AB : R :: *tang* BC : *tang* A, c'est-à-dire, *sin* 48° 51′ : R :: *tang* 37° 45′ : *tang* A; et par la même raison, on aura pour l'angle C, *sin* BC : R :: *tang* AB : *tang* C, c'est-à-dire, *sin* 37° 45′ : R :: *tang* 48° 51′ : *tang* C.

Opérant par logarithmes, on aura,

Pour l'angle A,

Log tang 37° 45′.	9,8888996
Log du rayon.	1 . . . . .
Complément arithmét. du *log sin* 48° 51′.	0,1232111
Somme ou *log tang* A.	10,0121107

Pour l'angle C,

Log tang 48° 51′.	10,0585415
Log du rayon.	1 . . . . .
Complément arithmét. du *log sin* 37° 45′.	0,2130944
Somme ou *log tang* C.	10,2716359

après avoir ôté une unité au premier chiffre, selon ce qui a été dit (297),

qui, dans les tables, répondent à 45° 48′ et 61° 51′, qui sont, le premier, la valeur de l'angle A, et le second, la valeur de l'angle C, parceque les deux côtés AB, BC étant tous deux plus petits que 90°, les deux angles A et C doivent aussi (344) être tous deux plus petits que 90°.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit se conduire dans les autres cas; mais pour épargner à ceux qui auroient de ces sortes de calculs à faire, la peine de recourir aux triangles complémentaires, nous joignons ici

QUESTION II. *Etant donnés deux côtés* AB, AC (fig. 180), *et un angle opposé* B, *trouver le troisieme côté* BC.

De l'angle A opposé au côté cherché, imaginez l'arc perpendiculaire AD; et dans le triangle rectangle ADB, calculez le segment BD par cette proportion, qui revient au même que la seconde de la table ci-dessus, page 231 :

$$\cos B : R :: \cot AB : \cot BD;$$

ou bien par cette autre :

$$R : \cos B :: \tang AB : \tang BD,$$

qui revient au même, puisque (280) les tangentes sont réciproquement proportionnelles aux cotangentes.

Et pour avoir le second segment CD, faites cette autre proportion (357) :

$$\cos AB : \cos AC :: \cos BD : \cos CD.$$

Alors, selon que AD tombe dans le triangle ou hors du triangle, vous aurez BC, en prenant ou la somme ou la différence de BD et DC.

QUESTION III. *Etant donnés les deux angles* B *et* C (*fig.* 180), *et un côté opposé* AB, *trouver le côté intercepté* BC.

De l'angle A opposé au côté cherché BC, imaginez l'arc perpendiculaire AD; et dans le triangle rectangle ADB, calculez BD par la même proportion que dans la Question II; savoir :

$$R : \cos B :: \tang AB : \tang BD.$$

Pour avoir le second segment CD, faites cette autre proportion (358) :

$$\cot B : \cot C :: \sin BD : \sin CD.$$

Et pour avoir BC, prenez la somme ou la différence de CD et de BD, selon que la perpendiculaire tombe dans le triangle ou hors du triangle.

QUESTION IV. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (fig. 180), *et l'angle compris* B, *trouver le troisieme côté* AC.

Les proportions que renferme cette table sont toutes fondées sur les deux principes enseignés (349 et 351), et appliquées, soit immédiatement au triangle ABC, soit aux triangles complémentaires, puis transportées au triangle ABC. Par exemple, la premiere est la proportion même du n° 349 ou du n° 350, appliquée immédiatement au triangle ABC, en renversant seulement les deux rapports; la seconde est la proportion du n° 351, appliquée au triangle complémentaire CED, dans lequel on a R : *sin* DE :: *tang* D : *tang* CE, ou, en rapportant au triangle ABC, R : *cos* A :: *cot* AB : *cot* AC, ou, en mettant le premier rapport à la place du second, *cot* AB : *cot* AC :: R : *cos* A.

On trouvera de même les autres proportions que renferme cette table; les inversions qu'on y a faites dans les proportions que donneroient immédiatement les deux principes (349 et 351), ne sont pas indispensables; elles n'ont pour objet que de faire que la quantité cherchée soit le quatrieme terme de la proportion.

C'est par des triangles sphériques rectangles qu'on calcule les ascensions droites, et les déclinaisons des astres, par le moyen de leur longitude et de leur latitude, et réciproquement; mais ce n'est point encore ici le lieu d'exposer les notions d'astronomie que ces objets supposent.

Des Triangles sphériques obliquangles.

354. Les triangles sphériques rectangles se résolvent dans tous les cas par une seule analogie, ainsi qu'on vient de le voir. Il n'en est pas de même des triangles sphériques obliquangles : dans plusieurs cas, il faut faire deux analogies. Ces cas exigent qu'on abaisse de l'un des angles du triangle proposé un arc de grand cercle, perpendiculairement sur le côté opposé. Comme cet arc peut tomber ou sur le côté même, ou sur le prolongement de ce côté, selon les différents rapports de grandeur des côtés et des angles, il convient, avant d'établir les principes de la résolution de

ces sortes de triangles, de faire distinguer les cas où l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle, de ceux où il tombe au-dehors.

355. *L'arc de grand cercle* AD (fig. 180), *abaissé perpendiculairement de l'angle* A *d'un triangle sphérique sur le côté opposé, tombe dans le triangle, quand les deux autres angles* B *et* C *sont de même espece; et au-dehors, quand ils sont de différente espece.*

Car, dans les triangles rectangles ADC, ADB (fig. 180), les deux angles B et C doivent être chacun de même espece que le côté opposé AD (344); donc ils doivent être de même espece entre eux.

Dans les triangles rectangles ADC, ADB de la figure 181, les angles ACD, ABD doivent être de même espece chacun que le côté opposé AD; donc, puisque ABC est supplément de ABD, ABC et ACD doivent être de différente espece.

Principes pour la Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

356. La résolution de tous les cas possibles des triangles sphériques obliquangles porte sur cinq principes que nous allons faire connoître, et sur la résolution des triangles rectangles : tous ces principes ne sont pas nécessaires à-la-fois pour chaque cas; mais ils le sont pour être en état de les résoudre tous.

De ces cinq principes, nous en avons déja établi deux; ce sont ceux qui sont énoncés aux numéros 336 et 349 : voici les trois autres.

357. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 179), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc de grand cercle* AD *perpendiculairement sur le côté opposé* BC, *on aura toujours cette proportion : Le cosinus du segment* BD *est au cosinus du segment* CD, *comme le cosinus du côté* AB *est au cosinus du côté* AC.

QUESTION VIII. *Etant donnés deux angles* F *et* G (fig. 182), *et un côté opposé* GE, *trouver le troisieme angle* E.

Prenez les suppléments des trois choses données, et vous connoîtrez dans le triangle supplémentaire ABC, AC, AB et l'angle B; calculez donc le côté BC par la Question II : le supplément de ce côté sera la valeur de l'angle E (336).

QUESTION IX. *Etant donnés les deux côtés* EG, EF (fig. 182), *et un angle opposé* G, *trouver l'angle* E *compris entre les deux côtés connus.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connoîtrez l'angle B, l'angle C, et le côté AB; il s'agira de calculer le côté BC, ce qui se fera par la Question III. Le supplément de BC sera la valeur de l'angle E (336).

QUESTION X. *Etant donnés deux angles* G *et* E (fig. 182), *et le côté intercepté* GE, *trouver le troisieme angle* F.

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connoîtrez AB, BC, et l'angle compris B; il s'agira de calculer AC, ce qui se fera par la Question IV. Le supplément de AC sera l'angle demandé F (336).

QUESTION XI. *Etant donnés deux angles* G *et* E (fig. 182), *et le côté intercepté* GE, *trouver l'un des deux autres côtés; trouver* FE, *par exemple.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connoîtrez AB, BC, et l'angle compris B; il s'agira de calculer l'angle C, ce qui se fera par la Question V. Le supplément de C sera la valeur du côté FE (336).

QUESTION XII. *Etant donnés les trois angles* E, F, G (fig. 182), *trouver l'un des côtés; le côté* EG, *par exemple.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connoîtrez les trois côtés BC, AC, AB; il s'agira de calculer l'angle B, ce qui se fera par la Question VI. Le supplément de B sera la valeur du côté cherché EG (336).

Avant de passer aux exemples, remarquons que, quoique plusieurs cas des triangles obliquangles exigent deux analogies, il y a cependant une espece de triangles obliquangles qui peut toujours être résolue par une seule analogie; ce sont ceux dont un côté est de 90°; car, en employant le triangle supplémentaire, ce triangle devient un triangle rectangle.

Donnons maintenant quelques exemples.

Exemple de la Question IV. Supposons que le point F (fig. 166) marque la position de Paris sur la terre; le point G, celle de Toulon : on sait, par les observations astronomiques, que la latitude de Paris, ou l'arc BF est de 48° 50′ (1); que la latitude de Toulon, ou l'arc GE est de 43° 7′, et que la différence de longitude entre Paris et Toulon, ou l'arc BE, ou l'angle BAE ou FAG est de 3° 37′ : on demande quelle est la plus courte distance de Paris à Toulon.

Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre sur la surface d'une sphere, est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points. Imaginons l'arc FG de grand cercle. Si des arcs AB, AE, de 90° chacun, nous retranchons les arcs BF, GE qui sont de 48° 50′ et 43° 7′, nous aurons les arcs AF, AG de 41° 10′ et de 46° 53′. Nous connoîtrons donc, dans le triangle AFG, les deux côtés AF, AG, et l'angle compris FAG; il est question de calculer le troisieme côté FG.

Représentons le triangle FAG par le triangle ABC (fig. 183), et supposons AB de 41° 10′, BC de 46° 53′, et l'angle B de 3° 37′; alors, selon la regle donnée dans la Question IV, je calcule le segment BD par cette proportion :

$$R : \cos 3^\circ 37' :: \tan 41^\circ 10' : \tan BD.$$

(1) Nous négligeons les secondes dans cet exemple.

Opérant par logarithmes, j'ai :

Log cos 3° 37'.	9,9991342
Log tang 41° 10'.	9,9417135
Somme.	19,9408477
Log du rayon.	1 . . . . . .
Reste ou *log tang* BD	9,9408477

qui, dans la table, répond à 41° 7' ; retranchant 41° 7' de BC, c'est-à-dire, de 46° 53', nous aurons 5° 46' pour le segment CD.

Pour trouver le côté AC, je fais, conformément à ce qui a été prescrit dans la Question IV, cette proportion :

$$cos\ 41^\circ\ 7' : cos\ 5^\circ\ 46' :: cos\ 41^\circ\ 10' : cos\ AC.$$

Et opérant par logarithmes, j'ai :

Log cos 41° 10'.	9,8766785
Log cos 5° 46'.	9,9977966
Complément arithm. du *log cos* 41° 7'. .	0,1229904
Somme ou *log cos* AC.	19,9974655

d'où, par les tables, on conclut que AC est de 6° 11', qui, à raison de 20 grandes lieues par degré, valent 124 grandes lieues à très peu près ; mais, en lieues moyennes ou de 25 au degré, cela revient à 154 lieues environ.

Exemple de la Question VI. Nous avons dit (138), en parlant de la maniere de lever les plans, que nous donnerions les moyens de réduire les angles observés au-dessus ou au-dessous d'un plan horizontal, à ceux qu'on observeroit dans ce plan même. En voici la méthode.

Supposons que A, B, C (fig. 184) soient trois points différemment élevés au-dessus du plan horizontal HE, et imaginons les perpendiculaires B*b*, A*a*, C*c* sur ce plan ; on aura un triangle *abc* dont les sommets *a*, *b*, *c*, représentent les objets A, B, C, de la maniere dont ils doivent être représentés sur une carte.

Supposant qu'on ait pu, du point A, observer les deux oints B et C, on demande ce qu'il faut faire pour déter-niner l'angle *a*.

On mesurera au point A l'angle BAC et les angles BA*a*, CA*a*; le premier peut être mesuré sans aucune difficulté; l'égard de chacun des deux autres, de l'angle BA*a* par xemple, on disposera l'instrument dans le plan vertical qu'on imagine passer par AB, et plaçant un des diametres horizontalement, par le moyen du fil à-plomb, qui alors marquera la ligne A*a*, on dirigera l'autre diametre au point B, et on verra sur l'instrument combien il y a de degrés entre le fil à-plomb et le diametre dirigé au point B, ce qui donnera l'angle BA*a*; on trouvera de même l'angle CA*a*.

Cela posé, si l'on conçoit que, d'un rayon quelconque AD et du point A comme centre, on ait décrit les arcs DF, DG, GF dans les plans des angles BAC, BA*a*, CA*a*, on aura un triangle sphérique DGF, dans lequel on connoîtra les côtés DF, DG, GF, mesures des angles BAC, BA*a*, CA*a* qu'on a observés; l'angle DGF de ce triangle sera égal à l'angle *bac*, puisque les deux droites *ba*, *ac* étant perpendiculaires à l'intersection A*a* des deux plans A*b*, A*c*, font le même angle que ces plans, et par conséquent (320) un angle égal à l'angle sphérique DGF.

Supposons donc que les angles observés BAC, DA*a*, CA*a* soient respectivement de 82° 10′, 77° 42′, 74° 24′; il s'agit donc (*fig.* 180) de calculer l'angle B opposé au côté AC de 82° 10′ dans le triangle sphérique ABC, dont les trois côtés AB, AC, BC sont respectivement de 74° 24′, 82° 10′, 77° 42′. Donc, conformément à ce qui a été dit dans la Question VI, je calcule la demi-différence des deux segments BD et CD par cette proportion, $tang\,\frac{BC}{2} : tang\,\frac{AC+AB}{2} :: tang\,\frac{AC-AB}{2}$: $tang\,\frac{CD-BD}{2}$, c'est-à-dire, $tang\ 38^\circ\ 51' : tang\ 78^\circ\ 17' ::$ $tang\ 3^\circ\ 53' : tang\,\frac{CD-BD}{2}$.

Opérant par logarithmes, j'ai :

Log tang 3° 53′.	8,8317478
Log tang 78° 17′.	10,6832050
Complément arithm. du *log tang* 38° 51′.	0,0939569
Somme ou *log tang* $\frac{CD - BD}{2}$.	19,6089097

qui répond à 22° 7′.

Retranchant 22° 7′ qui est la demi-différence de la moitié de BC, c'est-à-dire, de 38° 51′, nous aurons (301) le plus petit segment BD de 16° 44′ ; alors, dans le triangle rectangle ADB, pour avoir l'angle B, je fais, conformément à ce qui a été dit dans la Question VI, cette proportion : *tang* AB : *tang* BD :: R : *cos* B, c'est-à-dire, *tang* 74° 24′ : *tang* 16° 44′ :: R : *cos* B.

Et opérant par logarithmes, j'ai :

Log tang 16° 44′.	9,4780592
Log du rayon.	1 . . . . .
Complément arithm. du *log tang* 74° 24′.	89,4459232
Somme ou *log cos* B.	108,9239824

qui répond à 4° 48′, dont le complément 85° 12′ est la valeur de l'angle B, c'est-à-dire (fig. 184), de l'angle *bac*.

Pour réduire l'angle C à l'angle *c*, on feroit un calcul semblable, en supposant qu'on eût observé l'angle ACB, l'angle AC*c*, et l'angle BC*c*.

A l'égard du troisième angle *b*, il n'est pas nécessaire de le calculer, parceque le triangle *abc* étant rectiligne, ses trois angles valent deux droits.

REMARQUE.

En supposant toujours qu'aucune partie d'un triangle sphérique n'est de plus de 180°, on peut déterminer, par une règle assez simple, si ce qu'on cherche doit être moindre que 90°, ou s'il peut indifféremment être plus grand ou plus petit. Voici cette règle.

Si le quatrième terme de l'analogie ou proportion que vous êtes

obligé de faire pour résoudre un triangle sphérique, est un sinus, l'arc auquel il appartiendra peut indifféremment être de moins ou de plus que 90°, excepté le cas où, le triangle étant rectangle, il se trouveroit parmi les trois choses connues, une qui seroit opposée dans le triangle à celle que l'on cherche. Dans ce cas (344), ces deux dernieres quantités sont toujours de même espece entre elles.

Mais si le quatrieme terme est un cosinus, ou une cotangente, ou une tangente, alors observez, à l'égard des termes connus de la proportion, la regle suivante : Donnez le signe + au rayon et à tous les sinus, soit que les arcs auxquels ils appartiennent soient plus grands, soit qu'ils soient plus petits que 90°. Donnez pareillement le signe + à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus petits que 90°; et, au contraire, donnez le signe — à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus grands que 90°. Alors, si le nombre des signes — est zéro ou pair, l'arc qui répond au quatrieme terme sera toujours moindre que 90°; il sera au contraire plus grand que 90°, si le nombre des signes — est impair.

Cette regle est fondée, 1° sur la regle pour la multiplication et la division des quantités considérées par rapport à leurs signes : on verra cette derniere dans l'Algebre; 2° sur ce qui a été observé (273 et suiv.) relativement aux sinus, cosinus, etc. des arcs plus petits ou plus grands que 90°.

TABLE

DES DIFFÉRENTES MESURES.

MESURES DES SURFACES.

CARACTERES.

Toise-carrée. . . . . TT
Pied de toise-carrée ou toise-pied. . . . . TP
Pouce de toise carrée ou toise-pouce. . . . . Tp
Ligne de toise-carrée ou toise-ligne. . . . . Tl
Point de toise carrée ou toise-point. . . . . T^{pt}
Prime de toise-carrée ou toise-prime. . . . . T'

SUBDIVISIONS.

					T'
				1 Tp	12
			1 Tl	12	144
		1 Tp	12	144	1728
	1 TP	12	144	1728	20736
1 TT	6	72	864	10368	124416

Pied-carré. . . . . PP
Pouce de pied-carré ou pied-pouce. . . . . Pp
Ligne de pied-carré ou pied-ligne. . . . . Pl
Point de pied-carré ou pied-point. . . . . P^{pt}
Prime de pied-carré ou pied-prime. . . . . P'

					P'
				1 Ppt	12
			1 Pl	12	144
		1 Pp	12	144	1728
	1 PP	12	144	1728	20736

MESURES DES SOLIDES.

-cube . . . . TTT
de toise-cube ou toise-toise-pied. . . . . TTP
e de toise-cube ou toise-toise-pouce. . . . . TTp
e de toise-cube ou toise-toise-ligne. . . . . TTl
t de toise-cube ou toise-toise-point. . . . . TTpt
e de toise-cube ou toise-toise-prime. . . . . TT'

				TT'
			1 TTpt	12
		1 TTl	12	144
	1 TTp	12	144	1728
1 TTP	12	144	1728	20736
6	72	864	10368	124416

Pied-cube. . . . . PP
Pouce de pied-cube ou pied-pied-pouce. . . . . PP
Ligne de pied-cube ou pied-pied-ligne. . . . . PP
Point de pied-cube ou pied-pied-point. . . . . PP
Prime de pied-cube ou pied-pied-prime. . . . . PP

				PP'
			1 PPpt	12
		1 PPl	12	144
	1 PPp	12	144	1728
1 PPP	12	144	1728	20736

Solive. . . . . S
Pied de solive. . . . . S
Pouce de solive. . . . . S
Ligne de solive . . . . S
Point de solive. . . . . S

					1 Spt
				1 Sl	12
			1 Sp	12	144
		1 SP	12	144	1728
	1 PPP	2	24	288	3456
1 Solive.	3	6	72	864	10368

CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

Circonférence.	Cir.
Degré.	d
Minute.	′
Seconde.	″
Tierce.	‴

				Tierces.
			1 seconde.	60
		1 minute.	60	3600
	1 degré.	60	3600	216000
Circonfér.	360	21600	1296000	77760000

Rapport du diametre à la circonférence. { Suivant Archimede, :: 7 : 22
Suivant Métius, :: 113 : 355.

Le même rapport approché à moins d'un 100000000ᵉ près. . . . . . :: 1 : 3,14159265

Valeur de l'arc de { 1^d 0,01745329 ; 1′ 0,00029089 ; 1″ 0,00000485 } le rayon étant 1.

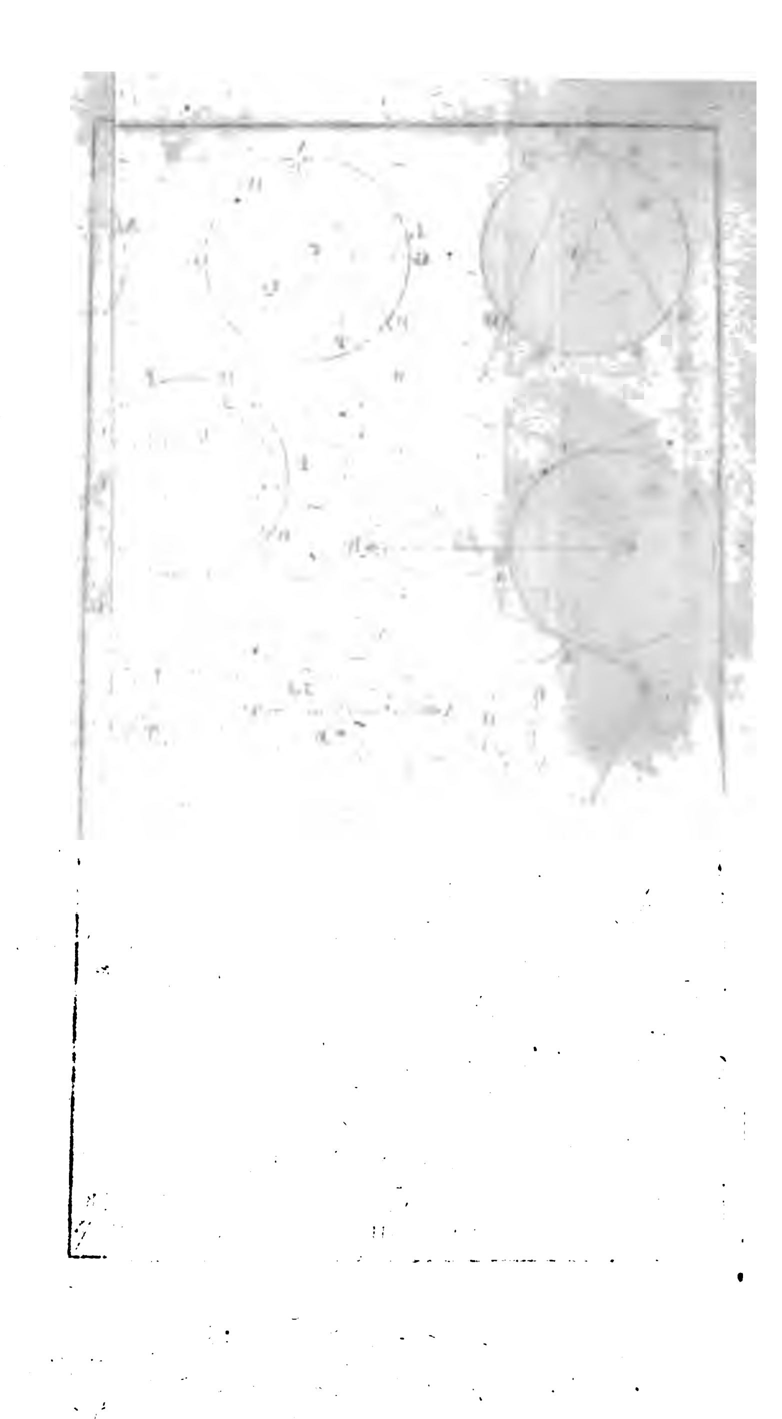
Logarithme du rapport de la circonfér. au diametre. 0,4971499

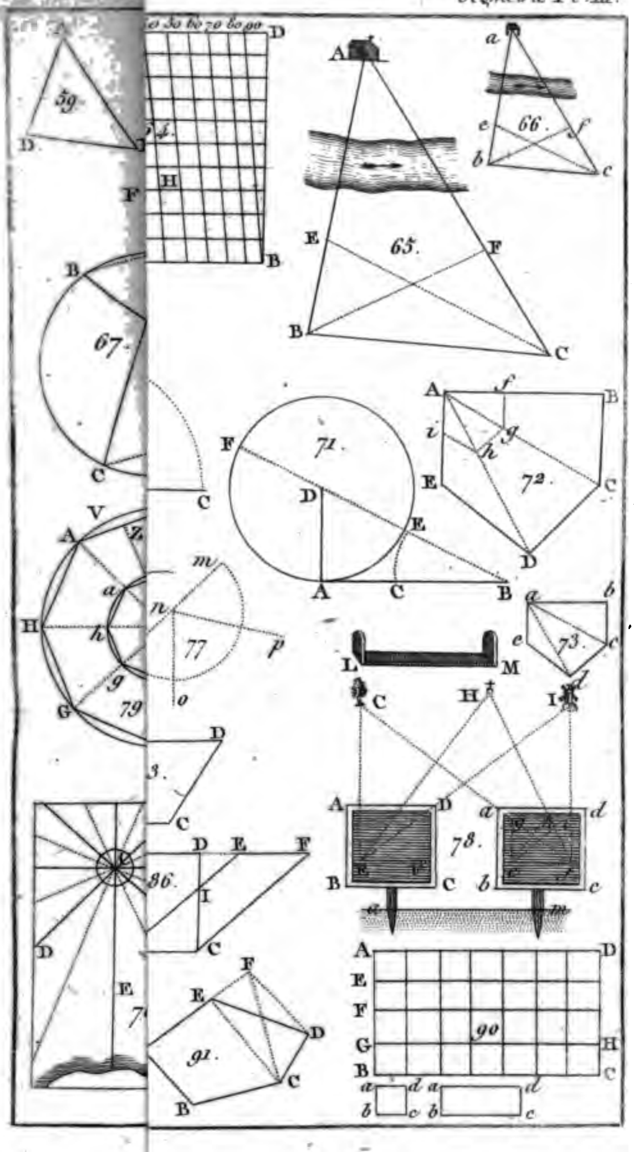
MESURES ITINÉRAIRES.

Le degré terrestre.	$57030^{T.}$
Diametre de la terre.	65335157
La lieue de 25 au degré.	2282
La lieue marine ou de 20 au degré.	$2851\frac{1}{2}$

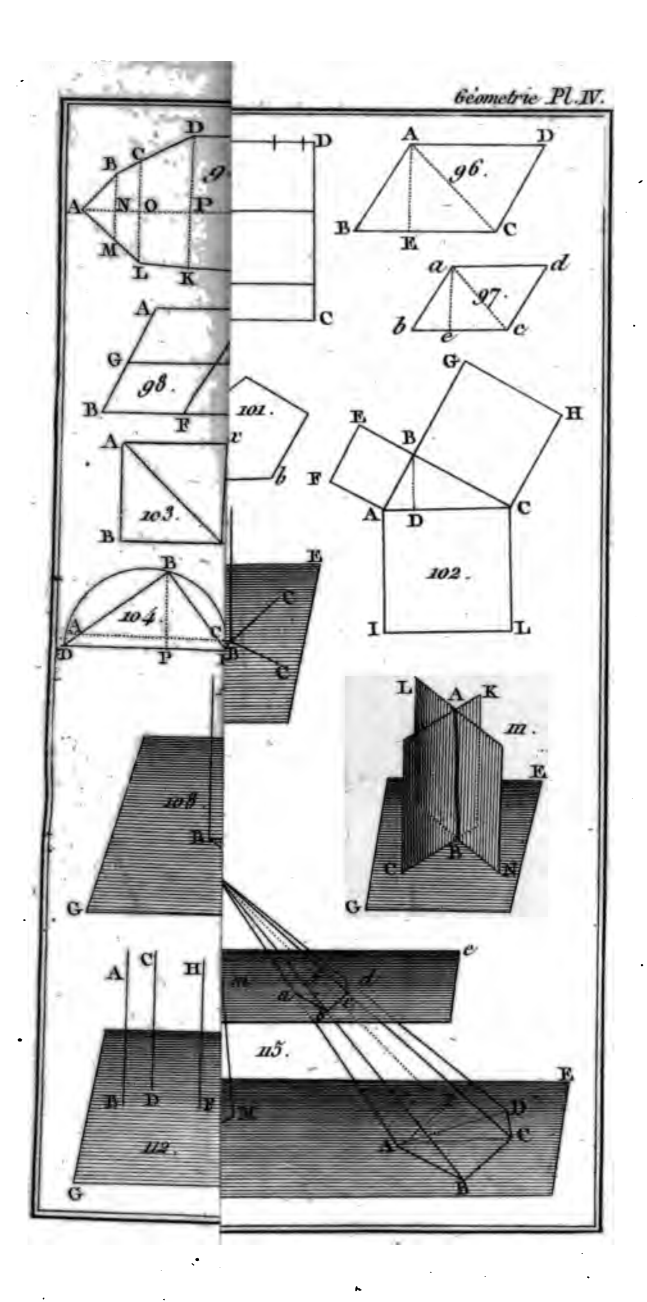
La grande lieue d'Allemagne de 15 au degré.	3802
La lieue commune d'Allemagne.	3333
La petite lieue d'Allemagne $= \frac{4}{5}$ de la grande.	3042
Le mille de Flandre.	3221
Le mille de France, d'Angleterre et d'Italie.	$950\frac{1}{2}$
Le stade.	85

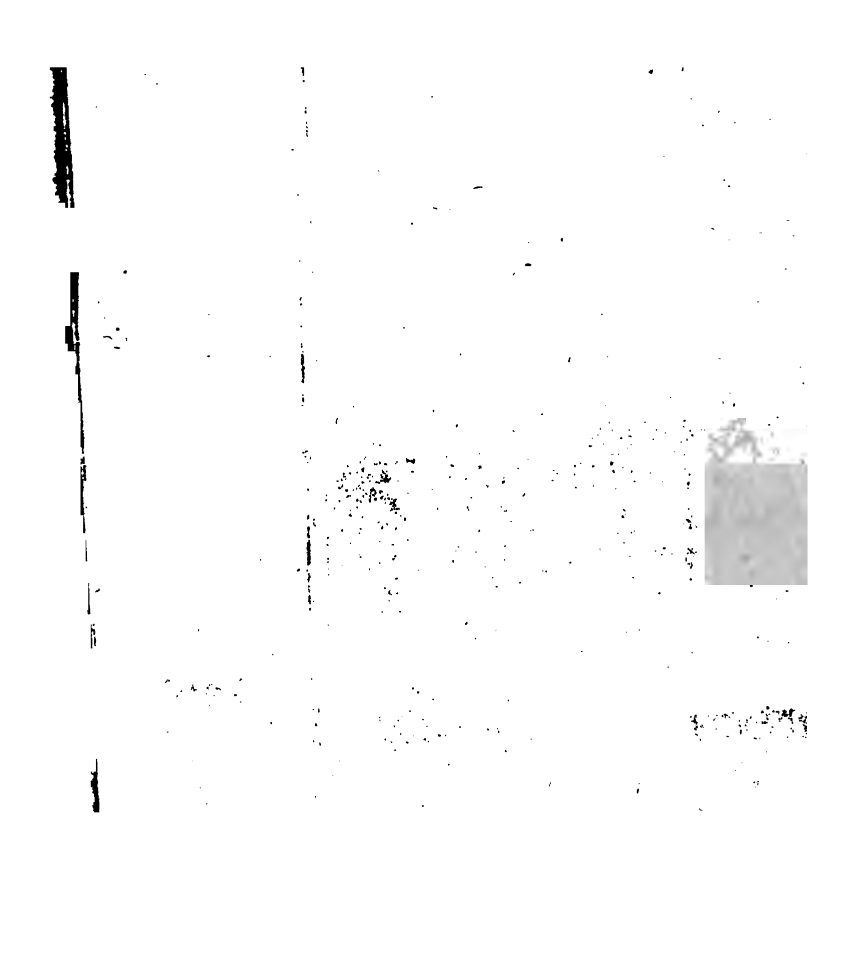
FIN.

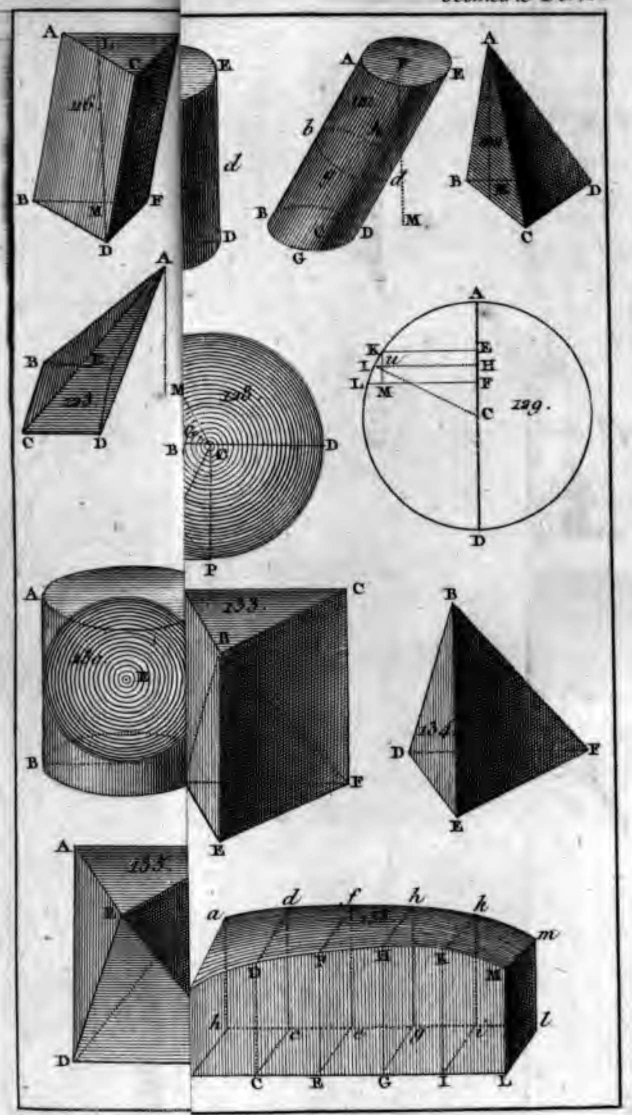


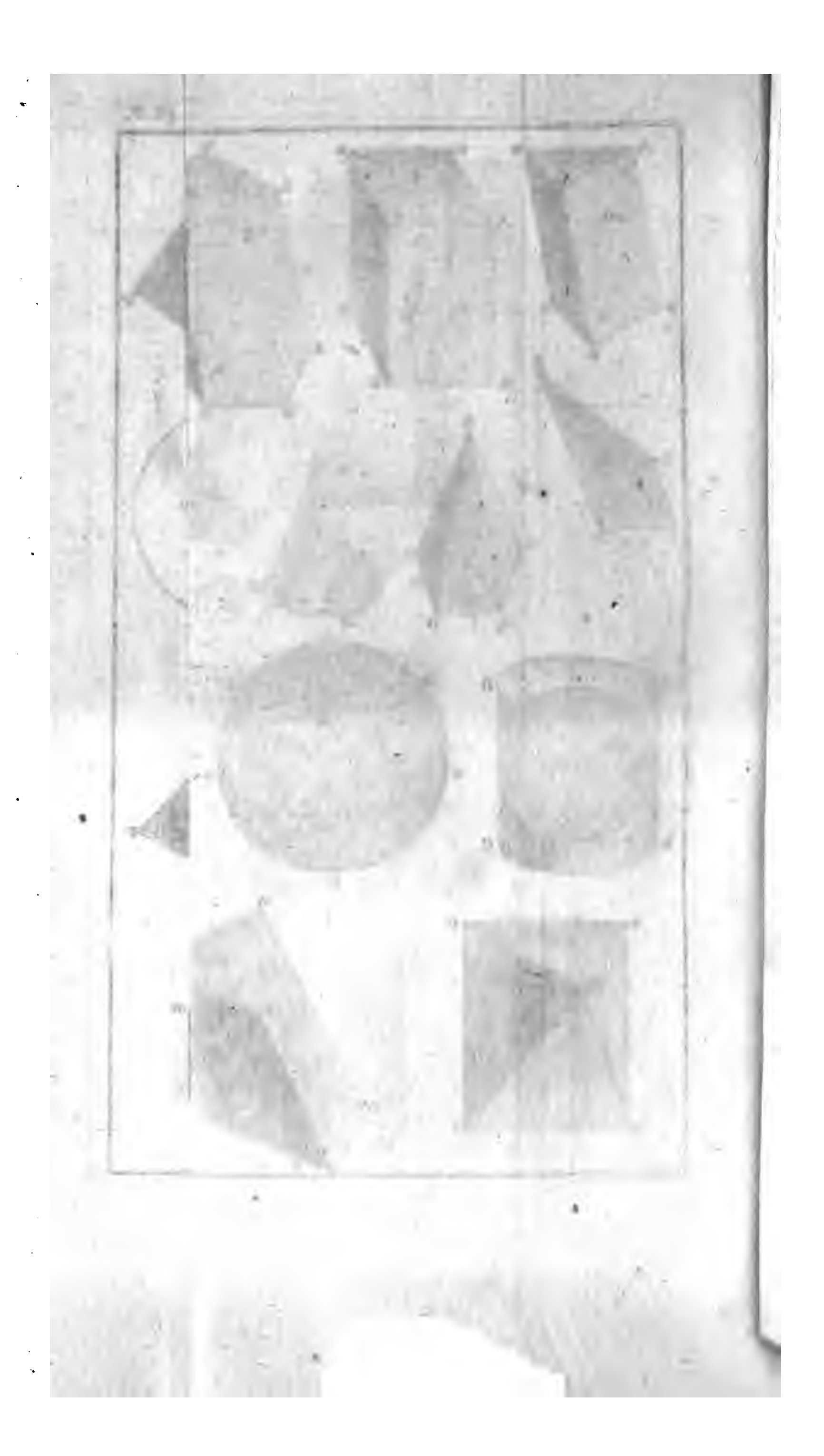

59.
64.
65.
66.
67.
71.
72.
73.
77.
78.
79.
86.
90.
91.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
L
M
a
b
c
d
e
f
g
h
i
m
n
o
p
V
Z

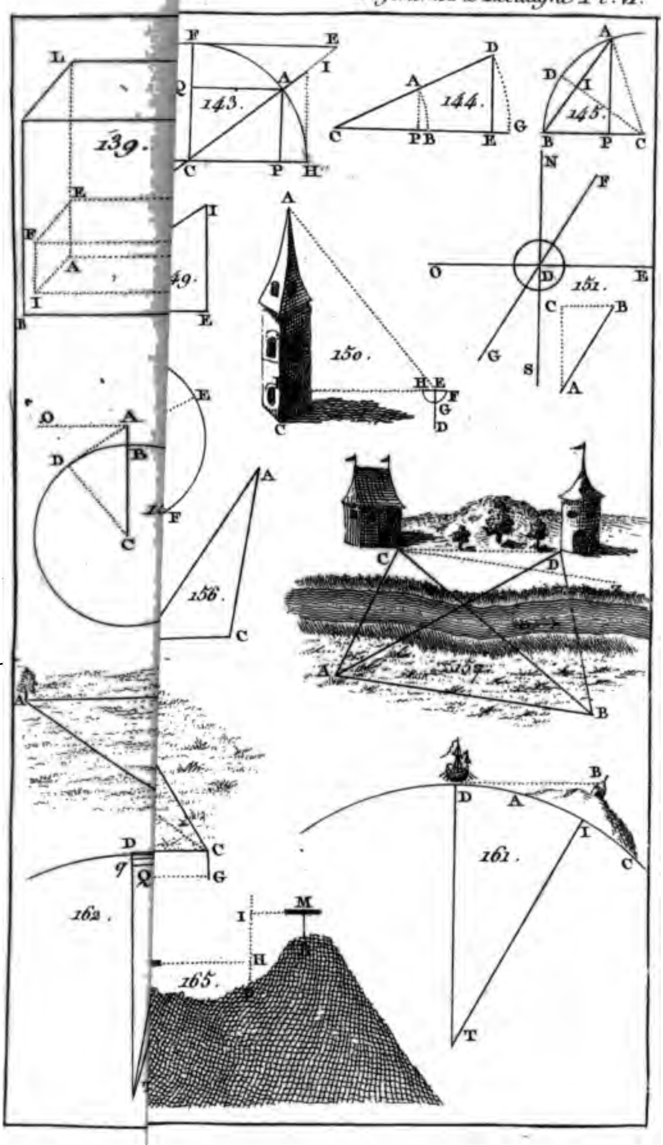



96.
97.
98.
101.
102.
103.
104.
108.
112.
115.

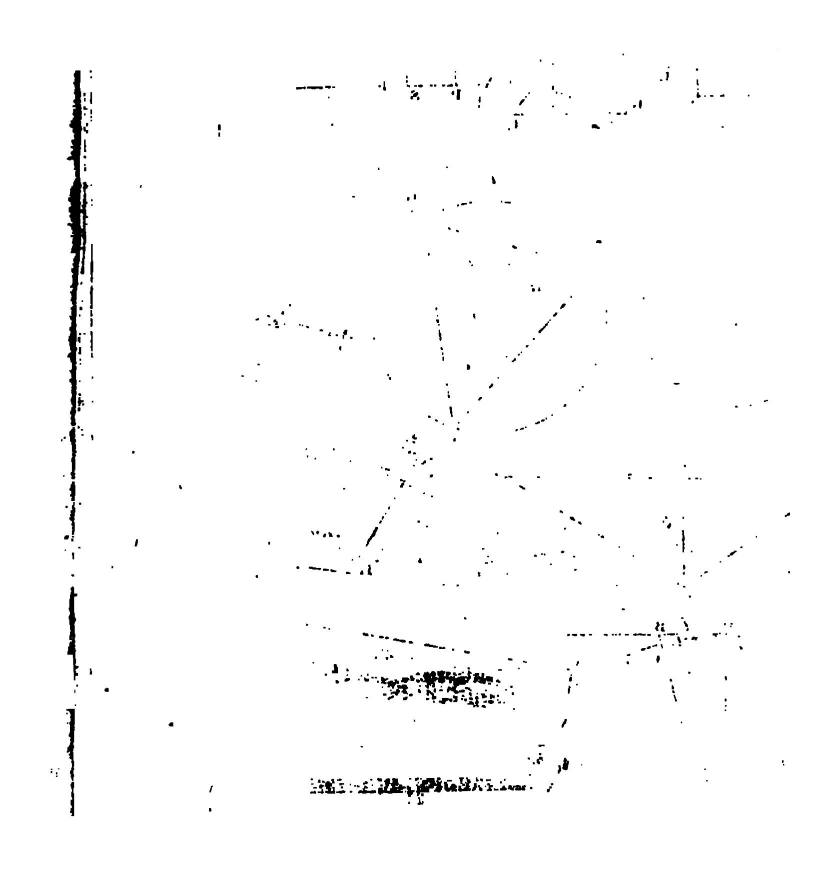



128.
129.
133.
134.
135.





139.
143.
144.
145.
149.
150.
151.
156.
157.
161.
162.
165.

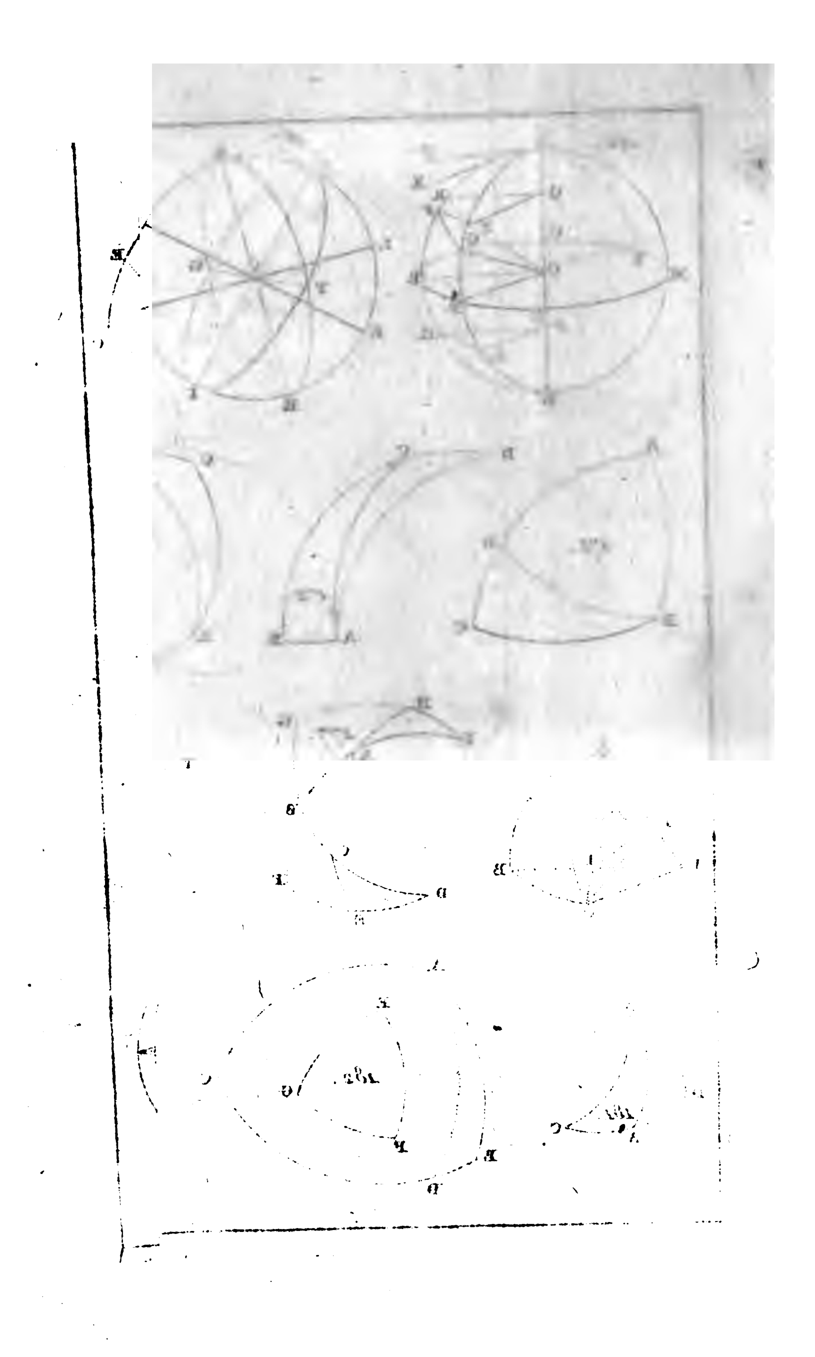


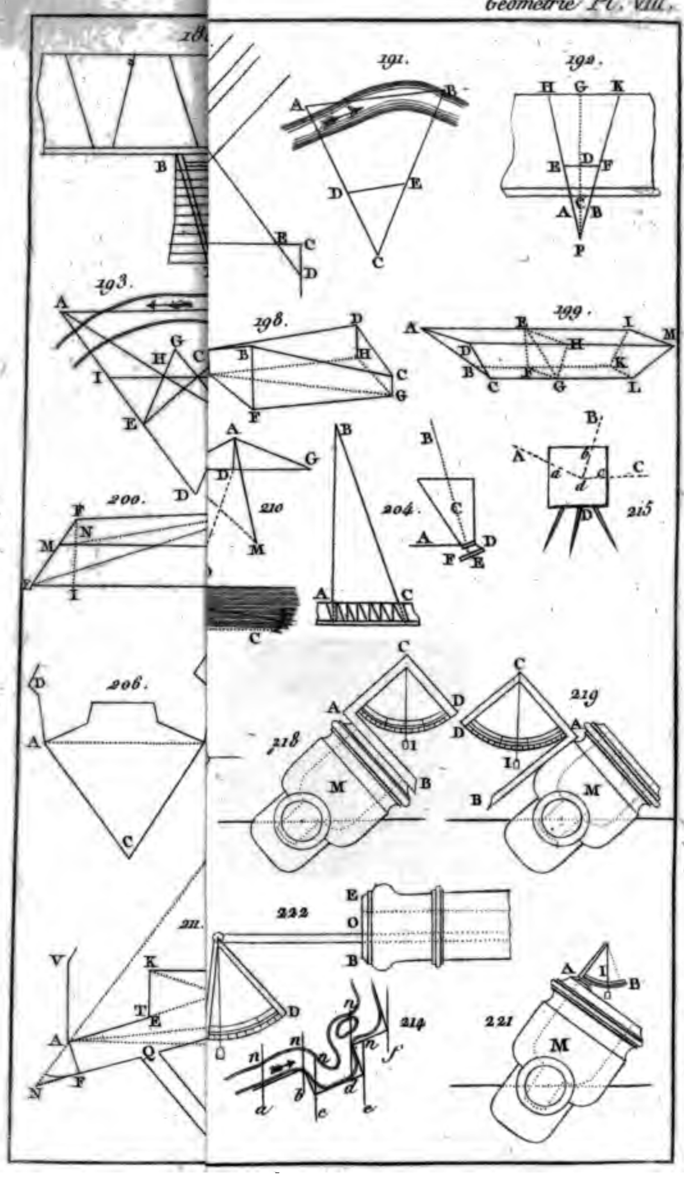
166. 169. 170.

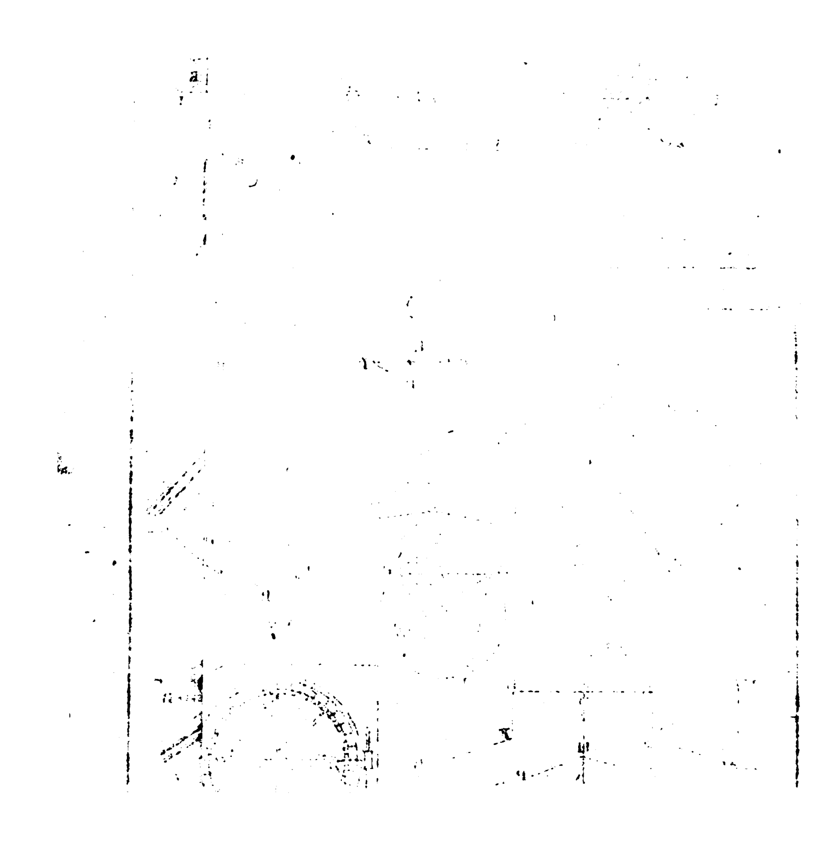
171. 174. 175.

176. 179. 180.

181. 184. 185.




191.
192.
193.
198.
199.
200.
204.
206.
210
211.
214
215
218
219
221
222



LA GÉOMÉTRIE

DE BÉZOUT,

ÉMONTRÉE PLUS RIGOUREUSEMENT.

SE TROUVE

Chez BECHET, libraire, quai des Augustins, n° 63;
VANRAEST et LAPEYRE, lib., quai Desaix, n° 1.
ARTHUS-BERTRAND, libraire, rue Hautefeuille;

LA GÉOMÉTRIE

DE BÉZOUT,

ÉMONTRÉE PLUS RIGOUREUSEMENT

PAR F. PEYRARD,

OFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE BONAPARTE.



PARIS,

TRIS ET Cie, LIBRAIRES, QUAI NAPOLÉON, AU COIN DE LA RUE DE LA COLOMBE, EN LA CITÉ, N° 4.

1810.

PRÉFACE.

CETTE seconde partie comprend, ainsi que le titre l'annonce, les Élémens de Géométrie, la Trigonométrie-rectiligne, et la Trigonométrie sphérique.

Je ne m'arrêterai point à rassembler ici les raisons, qui doivent engager les Élèves destinés à la Marine, à se rendre familiers les principes répandus dans ce livre. S'il est un art auquel l'application des Mathématiques soit plus utile qu'à un autre, c'est la navigation : dussé-je me répéter, je dois dire que ces sciences, qui sont utiles dans d'autres parties, sont indispensables dans celle-ci.

Il ne faut pas en conclure, cependant, qu'un livre de Géométrie Élémentaire destiné à cet objet, doive rassembler un grand nombre de propositions. S'il suffisoit, pour bien inculquer les principes d'une science, de donner ce qui est essentiellement nécessaire au but qu'on se propose, ceux qui connoissent un peu la Géométrie savent qu'on y satisferoit en peu de mots. Mais l'expérience démontre qu'un pareil livre seroit utile seulement à ceux qui ont acquis déjà des connoissances, et qu'il n'imprimeroit que de foibles traces dans l'esprit des Commençans.

D'un autre côté, il n'y a pas moins d'inconvéniens à trop multiplier les conséquences, surtout quand elles ne sont (comme il arrive souvent) que de nouvelles traductions des principes. Il n'est pas douteux que des Élémens destinés à un grand nombre de lecteurs, doivent suppléer aux conséquences que plusieurs n'auront pas le loisir et peut-être la faculté de tirer; mais il faut prendre garde aussi que ceux pour qui cette attention est nécessaire, sont le moins en état de soutenir la multitude des propositions. Le seul parti qu'il y ait à prendre, est, ce me semble, d'aller un peu plus loin que les principes, de s'arrêter aux conséquences utiles, et de fixer ces deux choses dans l'esprit, par des applications; c'est ce que j'ai tâché de faire.

J'ai partagé la Géométrie en trois sections, dont la première traite des lignes, des angles, de leur mesure, des rapports des lignes, etc. La seconde considère les surfaces, leur mesure et leurs rapports. La troisième est destinée aux solides ou corps, et renferme les principes nécessaires pour les mesurer et comparer leurs capacités. Dans la Trigonométrie rectiligne, j'ai donné quelques propositions, qui ne sont pas essentiellement nécessaires pour le moment; mais elles sont au moins utiles, et le seront encore plus par la suite : d'ailleurs quelques-unes trouvent leur application dès la Trigonométrie sphérique. Dans celle-ci, je me suis proposé de réduire à un moindre nombre, les principes dont on fait dépendre commu-

nément la résolution des triangles sphériques. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail; c'est dans l'ouvrage même qu'il faut le chercher. Ceux qui ne veulent lire que la Préface, ne gagneroient pas beaucoup au temps que je perdrois à cette analyse ; et ceux qui liront l'ouvrage, en jugeront mieux que par ce que je pourrois en dire ici.

Dois-je me justifier d'avoir négligé l'usage des mots, *Axiôme*, *Théoréme*, *Lemme*, *Corollaire*, *Scholie*, etc.? Deux raisons m'ont déterminé : la première est que l'usage de ces mots n'ajoute rien à la clarté des démonstrations : la seconde est que cet appareil peut souvent faire prendre le change à des Commençans, en leur persuadant qu'une proposition revêtue du nom de *Théoréme*, doit être une proposition aussi éloignée de leurs connoissances, que le nom l'est de ceux qui leur sont familiers. Cependant, afin que ceux de mes lecteurs qui ouvriront d'autres livres de Géométrie, ne s'imaginent pas qu'ils tombent dans un pays inconnu, je crois devoir les avertir que,

Axiôme signifie une proposition évidente par elle-même;

Théoréme, une proposition qui fait partie de la science dont il s'agit, mais dont la vérité, pour être aperçue, exige un discours raisonné qu'on appelle *Démonstration*;

Lemme (1) est une proposition qui ne fait pas essentiellement partie de la théorie dont il s'agit, mais qui sert à faciliter le passage d'une proposition à une autre;

Corollaire est une conséquence que l'on tire d'une proposition qu'on vient d'établir;

Scholie est une remarque sur quelque chose qui précède, ou une récapitulation de ce qui précède;

Probléme est une question dans laquelle il s'agit ou d'exécuter quelque opération, ou de démontrer quelque proposition.

AVERTISSEMENT.

Les nombres que l'on trouve entre deux parenthèses, dans plusieurs endroits de ce livre, sont destinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonstration de la proposition sur laquelle on s'appuie dans ces endroits. A l'égard des numéros, ils sont au commencement des *à lineâ*.

---

(1) Un *Lemme* est souvent une proposition empruntée d'une autre science.

LA GÉOMÉTRIE

DE BÉZOUT,

ÉMONTRÉE PLUS RIGOUREUSEMENT

PAR F. PEYRARD.

DÉFINITIONS.

1. Une ligne est une longueur sans largeur ni épaisseur.

2. On appelle points les extrémités d'une ligne et l'endroit où ux lignes se coupent ou se rencontrent.

3. Une surface est ce qui a longueur et largeur seulement.

4. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

5. Un solide est ce qui a longueur, largeur et épaisseur.

6. Les extrémités d'un solide sont des surfaces.

7. La ligne droite est celle qui, tournant sur deux de ses ints immobiles, ne change point de place.

8. Une surface plane, est celle sur laquelle une droite peut ppliquer exactement dans tous les sens.

9. Un angle rectiligne est l'inclinaison mutuelle de deux oites qui se rencontrent en un point qu'on appelle sommet.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une autre, forme deux gles égaux, ces angles s'appèlent droits, et la première droite dite perpendiculaire sur la seconde.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. On appelle figure ce qui est compris par une seule ou par usieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne, dont tous les points sont également éloignés d'un point pris dans la figure. Ce point se nomme le centre du cercle, et la ligne que comprend le cercle se nomme circonférence.

16. Un arc est une partie de la circonférence.

17. La droite qui va du centre à la circonférence se nomme rayon.

18. La droite qui va d'un point de la circonférence à un autre se nomme corde ou soutendante.

19. La corde qui passe par le centre se nomme diamètre.

20. Un segment de cercle est la portion du cercle comprise entre un arc et la droite qui joint ses extrémités.

21. Un secteur de cercle est la portion du cercle comprise entre deux rayons et la circonférence.

22. La circonférence se partage en 360 parties, qu'on nomme degrés; le degré en 60 parties, qu'on appelle minutes; les minutes en 60 parties, qu'on appelle secondes; la seconde en 60 tierces, etc.

On se sert des signes o, ′, ″, ‴, etc. pour représenter les degrés, minutes, secondes, tierces, etc.

AXIÔMES.

23. Les grandeurs qui sont égales à une troisième, sont égales entre elles.

24. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les sommes sont égales.

25. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes sont égaux.

26. Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les sommes sont inégales.

27. Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes sont inégaux.

28. La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

29. Deux lignes droites ne comprennent point un espace.

PREMIÈRE PARTIE.

30. *Le diamètre partage le cercle et sa circonférence en deux parties égales.*

Soit le cercle $ABCD$ et AC son diamètre (*fig.* 1); je dis que le diamètre AC partage le cercle $ABCD$ et sa circonférence en deux parties égales.

Renversons le segment ABC sur le segment ADC, le diamètre AC restant commun; si l'arc ABC ne s'applique pas exactement sur l'arc ADC, quelque point de l'arc ABC tombera en dedans ou en dehors du segment ADC. Premièrement que le point B tombe en dedans du segment ADC, au point F, par exemple : par le centre et par le point F menons la droite ED; puisque le point B tombe sur le point F, la droite EB est égale à EF; mais EB est égal à ED; donc EF est égal à ED, ce qui est absurde; donc le point B ne peut pas tomber en dedans du segment.

Secondement que le point B tombe en dehors du segment, au point G, par exemple : menons la droite EG. Puisque le point B tombe sur le point G, la droite EB est égale à la droite EG. Mais le rayon EB est égal au rayon FD; donc la droite EG est égale à la droite ED, ce qui est absurde; donc le point B ne peut pas tomber en dehors du segment ADC. Mais nous avons démontré qu'il ne peut pas tomber en dedans; donc il tombe sur l'arc ADC.

On démontreroit de même que tout autre point de l'arc ABC tomberoit sur l'arc ADC; donc l'arc ABC s'applique exactement sur l'arc ADC; donc les deux arcs sont égaux. Donc le diamètre partage la circonférence en deux parties égales.

Puisque l'arc ABC s'applique exactement sur l'arc ADC, il est évident que le segment ABC s'applique exactement sur le segment ADC; donc le diamètre partage aussi le cercle en deux parties égales.

31. *Dans un même cercle, et dans des cercles égaux arcs égaux sont soutendus par des cordes égales.*

Je dis d'abord que dans un même cercle des arcs égau soutendus par des cordes égales.

Il y a deux cas, car les arcs sont contigus, ou ils ne le soı

Premier cas. Soient les arcs contigus et égaux *AB*, (*fig.* 2.). Menons le diamètre *AC*, et renversons le cercle *ABC* sur le demi-cercle *ADC*, le diamètre restant mun; le point *B* tombera sur le point *D*, parce que l'ar est égal à l'arc *AD*; donc la corde *AB* s'appliquera exact sur la corde *AD*; donc ces cordes sont égales.

Deuxième cas. Que les arcs égaux *AB*, *DE* (*fig.* 3 ne soient pas contigus; menons les diamètres *BC*, *EF*. T portons le demi-cercle *BAC* sur le demi-cercle *ED*1 manière que le diamètre *BC* s'applique exactement sur l mètre *EF*; le point *A* tombera sur le point *D*, puisque *AB* est égal à l'arc *DE*; donc la corde *AB* s'appliquera tement sur la corde *DE*; donc les deux cordes sont égale

Je dis à présent que dans des cercles égaux les arcs égau soutendus par des cordes égales.

Soient les arcs égaux *AB*, *CD* (*fig.* 5) dans les égaux *ABE*, *CDE*; menons les diamètres *BE*, *DF*. T portons le demi-cercle *BAE* sur le demi-cercle *DCE*, nière que le diamètre *BE* s'applique exactement sur le dia *DF*; le point *A* tombera sur le point *C*, puisque l'arc égal à l'arc *CD*; donc la corde *AB* s'applique exactem la corde *CD*; donc les deux cordes sont égales.

Donc dans un même cercle, ou dans des cercles égau arcs égaux sont soutendus par des cordes égales.

32. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égau cordes égales soutendent des arcs égaux.*

Je dis d'abord que dans le même cercle, les cordes soutendent des arcs égaux. Il y a deux cas, car les cord contigües, ou elles ne le sont pas.

Premier cas. Soient les deux cordes contigües et égales *AB*, *BD* (*fig.* 2). Menons le diamètre *AC*, et prolongeons-le vers *E*, et du point *A* avec le rayon *AD*, décrivons la demi-circonférence *EDF*. Renversons le demi-cercle *ABC* sur le demi-cercle *ADC*, le diamètre *AC* restant commun; le point *B* tombera sur la demi-circonférence *ADC*; il tombera aussi sur la demi-circonférence *EDF*, puisque la corde *AB* est égale au rayon *AD*; donc le point *B* tombera tout à la fois sur les deux demi-circonférences *ADC*, *EDF*; donc le point *B* tombera sur le point *D*, qui est le seul point commun à ces deux demi-circonférences; donc l'arc *AB* s'appliquera exactement sur l'arc *AD*; donc ces deux arcs sont égaux.

Deuxième cas. Que les cordes égales *AB*, *DE* (*fig.* 3 et 4) ne soient pas contigües. Menons les diamètres *BC*, *EF*; prolongeons le diamètre *EF* vers *K*, et du point *E*, et avec *ED* décrivons la demi-circonférence *HDK*. Transportons le demi-cercle *BAC* sur le demi-cercle *EDF*, de manière que le diamètre *BC* s'applique exactement sur le diamètre *EF*; le point *A* tombera sur la demi-circonférence *FBE*, et ce même point tombera aussi sur la demi-circonférence *HDK*, parce que la corde *AB* est égale au rayon *ED*; donc le point *A* tombera tout à la fois sur les deux demi-circonférences *FBE*, *HDK*; donc le point *A* tombera sur le point *D*, qui est le seul point commun à ces deux circonférences; donc l'arc *AB* s'applique exactement sur l'arc *DF*; donc ces deux arcs sont égaux.

Je dis à présent que dans des cercles égaux des cordes égales soutendent des arcs égaux.

Soient les cercles égaux *ABE*, *CDF* (*fig.* 5), et les cordes égales *AB*, *CD*; je dis que les arcs *AB*, *CD* sont égaux.

Menons les diamètres *BE*, *DF*; prolongeons *FD*, et du point *D*, avec le rayon *DC*, décrivons la demi-circonférence *HCL*.

Transportons le demi-cercle *BAE* sur le demi-cercle *DCF*, de manière que le diamètre *BE* s'applique exactement sur le

diamètre *DE* ; le point *A* tombera sur la demi-circonférence *DCF*; il tombera aussi sur la demi-circonférence *HCL*, puisque *AB* est égal au rayon *CD*; donc le point *A* tombera sur le point *C*, qui est le seul point qui soit commun aux demi-circonférences *DCF*, *LCH*; donc l'arc *AB* s'applique exactement sur l'arc *CD*; donc ces deux arcs sont égaux; donc dans des cercles égaux les cordes égales soutendent des arcs égaux.

33. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les angles égaux qui ont leurs sommets au centre, comprennent des arcs égaux.*

Je dis d'abord que dans un même cercle, deux angles égaux, qui ont leurs sommets au centre, comprennent des arcs égaux.

Il y a deux cas; car ces angles peuvent avoir un côté qui leur soit commun, ou ils peuvent n'avoir aucun côté qui leur soit commun.

Premier cas. Que l'angle *ABC* soit égal à l'angle *CBD* (*fig.* 6); je dis que l'arc *AC* est égal à l'arc *CD*.

Prolongeons *CB*, et renversons le demi-cercle *CAE* sur le demi-cercle *CDE*; le rayon *BA* tombera sur le rayon *BD*, parce que l'angle *ABC* est égal à l'angle *CBD*; et le point *A* tombera sur le point *D*, parce que *BA* est égal à *BD*; donc l'arc *AC* s'applique exactement sur l'arc *CD*; donc ces deux arcs sont égaux.

Deuxième cas. Soient les angles égaux *ABC*, *DBE* (*fig.* 7 et 8). Prolongeons les rayons *AB*, *DB* vers les points *F*, *G*. Transportons le demi-cercle *ACF* sur le demi-cercle *DEG*, de manière que le diamètre *AF* s'applique exactement sur le demi-cercle *DG*. Puisque l'angle *ABC* est égal à l'angle *DBE*, le rayon *BC* tombera sur le rayon *BE*; donc le point *C* tombera sur le point *E*; donc l'arc *AC* s'appliquera exactement sur l'arc *DE*; donc ces deux arcs sont égaux; donc, etc.

Je dis, en second lieu, que dans des cercles égaux des angles qui ont leurs sommets au centre comprènent des arcs égaux.

Cela se démontreroit de la même manière que dans le second cas.

34. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les angles qui ont leurs sommets au centre, et qui comprennent des arcs égaux, sont égaux entre eux.*

Cette proposition se démontre d'une manière semblable.

35. *Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande on retranche une partie égale à sa moitié; si du reste on retranche une partie égale à sa moitié, et ainsi de suite; il restera enfin une certaine grandeur qui sera moindre que la plus petite des deux grandeurs proposées.*

Soient les deux grandeurs inégales AB, C (*fig.* 9), et que AB soit la plus grande. Que la grandeur C soit multipliée par un nombre assez grand pour que son multiple soit plus grand que AB; que DE soit ce multiple, et que les parties EF, FG, GH, HD soient chacune égales à C. Retranchons de AB une partie BK qui soit égale à sa moitié; retranchons du reste KA une partie KL qui soit égale à sa moitié et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nombre des parties de AB soit égal au nombre des parties de DE.

Puisque DE est plus grand que AB, que EF est plus petit que la moitié de ED, et que BK est égal à la moitié de AB, le reste FD est plus grand que le reste KA. Puisque FD est plus grand que KA, que FG est plus petit que la moitié de ED, et que KL est égal à la moitié de KA, le reste GD est plus grand que le reste LA. De plus, puisque GD est plus grand que LA, que GH est la moitié de GD, et que LM est la moitié de LA, le reste HD est plus grand que le reste MA. Mais HD est égal à C; donc MA est plus petit que C; donc, etc.

Il suit de-là qu'on peut toujours partager une grandeur proposée AB en parties égales, dont chacune soit plus petite qu'une autre grandeur proposée C. En effet, si sur la droite AB on

place à la suite les unes des autres des droites égales chacune à *AM*, la droite *AB* sera partagée en parties égales, dont chacune sera plus petite que *C*.

56. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprennent, lorsque ces angles sont commensurables entre eux; et les arcs sont proportionnels aux angles qui les comprennent lorsque ces mêmes arcs sont commensurables entre eux* (*).

Soient dans le cercle *ACD* (*fig.* 10), les angles *ABC*, *CBD*; je dis que l'angle *ABC* est à l'angle *CBD*, comme l'arc *AC* est à l'arc *CD*.

Que l'angle *EBF* soit la mesure commune des angles *ABC*, *CBD*; supposons que l'angle *ABC* contienne trois fois l'angle *EBF*, et que l'angle *CBD* contienne quatre fois ce même angle : supposons ensuite que les angles *ABG*, *GBH*, *HBC*, *CBK*, etc. soient égaux chacun à l'angle *EBF*; il est évident que les arcs *AG*, *GH*, *HC*, *CK*, etc. seront égaux chacun à l'arc *EF* (35) Mais l'angle *ABC* contient trois fois l'angle *EBF*, et l'angle *CBD* contient quatre fois l'angle *CBD*; donc

$$\text{angle } ABC : \text{angle } CBD :: 3 : 4;$$

ou bien :

angle ABC : angle CBD :: $3\times$ arc EF : $4\times$ arc EF. Mais $3\times$ arc $EF=$ arc AC, et $4\times$ arc $EF=$ arc CD; donc angle

(*) Deux quantités sont commensurables entre elles, lorsqu'elles ont une mesure commune, c'est-à-dire, lorsque l'une est contenue dans l'autre un certain nombre de fois sans reste, ou lorsqu'une troisième quantité est contenue sans reste dans la première, ainsi que dans la seconde.

Deux quantités sont incommensurables entre elles, lorsque l'une ne contient pas l'autre sans reste, et qu'en même temps il n'y a point de troisième quantité qui soit contenue un certain nombre de fois sans reste dans la première et dans la seconde.

Une droite qui seroit représentée par $\sqrt{5}$, seroit une droite incommensurable.

ABC : angle *CBD* :: arc *AC* : arc *CD*. Le raisonnement seroit le même quel que fût le nombre de fois que l'angle *ABC* contînt l'angle *EBF*, et le nombre de fois que l'angle *CBD* contînt ce même angle. Donc dans un même cercle, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprènent, lorsque ces angles sont commensurables entre eux.

On démontreroit de la même manière que, dans des cercles égaux, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprènent, lorsque ces angles sont commensurables entre eux.

Je dis à présent que l'arc *AC* est à l'arc *CD*, comme l'angle *ABC* est à l'angle *CBD*.

Que l'arc *EF* soit la mesure commune des arcs *AC*, *CD*; supposons que l'arc *AC* contienne trois fois l'arc *EF*, et que l'arc *DC* contiène quatre fois ce même arc; il est évident que l'arc *AC* sera égal à trois fois l'arc *EF*, et que l'arc *CD* sera égal à quatre fois l'arc *EF*. Que les arcs partiels *AG*, *GH*, *HC*, *CK*, etc. soient égaux chacun à l'arc *EF*, et menons les rayons *BG*, *BH*, *BK*, etc. Les angles *ABG*, *GBH*, *HBC*, etc. seront égaux entre eux, parce qu'ils sont au centre et qu'ils comprennent des arcs égaux (34). Mais l'arc *AC* contient trois fois l'arc *EF*, et l'arc *CD* contient quatre fois l'arc *EF*; on aura donc, arc *AC* : arc *CD* :: 3 : 4 :: 3 $\times$ angle *EBF* : 4 $\times$ angle *EBF*. Mais 3 $\times$ angle *EBF* = angle *ABC*, et 4 $\times$ angle *EBF* = angle *CBD*. Donc arc *AC* : arc *CD* :: angle *ABC* : angle *CBD*. Le raisonnement seroit le même quel que fût le nombre de fois que l'arc *AC* contînt l'arc *EF*, et le nombre de fois que l'arc *CD* contînt ce même arc. Donc dans un même cercle les arcs sont proportionnels aux angles au centre qui les comprennent, lorsque ces arcs sont commensurables entre eux.

On démontreroit de la même manière que dans cercles égaux les arcs sont proportionnels aux angles au centre qui les comprènent.

37. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprènent, et ces arcs sont proportionnels aux angles qui les comprènent, lors même que ces angles et ces arcs sont incommensurables entre eux.*

Soient dans le cercle *ACD* (*fig.* 11), les deux angles *ABC*, *CBD*; je dis que angle *ABC* : angle *CBD* :: arc *AC* : arc *CD*.

Que l'angle *ABC* soit plus grand que l'angle *CBD*. Faisons l'arc *CE* égal à l'arc *CD*. Menons le rayon *BE*. L'angle *CBE* sera égal à l'angle *CBD* (34), et au lieu de la première proportion, nous aurons celle-ci ; angle *ABC* : angle *CBE* :: arc *AC* : arc *CE*.

Si ces quatre quantités ne forment pas une proportion, c'est parce que le quatrième terme est trop grand ou trop petit. Supposons d'abord que le quatrième terme soit trop grand, et que l'on ait, angle *ABC* : angle *CBE* :: arc *AC* : arc *CF*. Partageons l'arc *AC* en parties égales, mais assez petites pour qu'il y ait un point de division entre le point *E* et le point *F* (35). Que *G* soit ce point. Menons le rayon *BG*. Puisque les arcs *AC*, *CG* sont commensurables, nous aurons, angle *ABC* : angle *CBG* :: arc *AC* : arc *CG* (36). Mais nous avons par supposition angle *ABC* : angle *CBE* :: arc *AC* : arc *CF*; on aura donc, en changeant les moyens de place, les deux proportions suivantes : angle *ABC* : arc *AC* :: angle *CBG* : arc *CG*; et angle *ABC* : arc *AC* :: angle *CBE* : arc *CF*. Donc angle *CBG* : arc *CG* :: angle *CBE* : arc *CF*. Mais le premier terme est plus petit que le troisième, et le second plus grand que le quatrième; donc ces quatre quantités ne forment pas une proportion. Donc l'angle *ABC* n'est pas à l'angle *CBE*, comme l'arc *AC* est à un arc plus petit que l'arc *CE*.

Je dis à présent que l'angle *ABC* n'est pas à l'angle *CBE* comme l'arc *AC* est à un arc plus grand que *CE*. Supposons que cela soit, et que l'on ait, angle *ABC* : angle *CBE* :: arc

AC : arc CF'. Partageons l'arc AC en parties égales, mais assez petites pour qu'il y ait un point de division entre le point E et le point F'(35), et que G' soit ce point. Menons le rayon BG'. Puisque les arcs AC, CG' sont commensurables entre eux (36), nous aurons, angle ABC : angle CBG' :: arc AC : arc CG'. Mais nous avons par supposition angle ABC : angle CBE :: arc AC : arc CF'; on aura donc, en changeant les moyens de place, les deux proportions suivantes, angle ABC : arc AC :: angle CBG' : arc CG', et angle ABC : arc AC :: angle CBE : arc CF'. Donc angle CBG' : arc CG' :: angle CBE : arc CF'. Mais le premier terme est plus grand que le troisième, et le second plus petit que le quatrième; donc ces quatre quantités ne forment pas une proportion. Donc l'angle ABC n'est pas à l'angle CBE, comme l'arc AB est à un arc plus grand que l'arc CE. Mais nous avons démontré que l'angle ABC n'est pas à l'angle EBC comme l'arc AB est à un arc plus petit que l'arc CE. Donc l'angle ABC est à l'angle CBE comme l'arc AC est à l'arc EC; donc dans un même cercle, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprennent, lors même que ces angles ne sont pas commensurables entre eux.

On démontreroit de la même manière que dans des cercles égaux, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprènent, lors même que ces angles sont incommensurables entre eux.

Je dis à présent que arc AC : arc EC :: angle ABC : angle EBC. En mettant les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens, nous aurons :
angle ABC : angle EBC :: arc AC : arc EC. Si ces quatre quantités ne formoient pas une proportion, ce serait parce que le quatrième terme seroit trop grand ou trop petit.

On démontreroit comme auparavant que le quatrième terme n'est ni trop grand ni trop petit, et l'on conclueroit que arc AC : arc EC :: angle ABC : angle EBC; donc dans le même cercle, les arcs sont proportionnels aux angles qui les

comprènent, lors même que ces arcs ne sont pas commensurables entre eux.

On démontreroit de la même manière que dans des cercles égaux, les arcs sont proportionnels aux angles qui les comprennent.

COROLLAIRE.

Les angles étant proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux, on est convenu de prendre ces arcs pour mesurer les angles, et l'on dit qu'un angle a pour mesure le nombre des degrés et parties de degrés de l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre. (L. 13—26).

38. *Si une droite* AB (fig. 12) *fait avec deux autres* BC, BD *deux angles* ABC, ABD, *dont la somme est égale à deux droits, les deux droites* CB, BD *ne forment qu'une seule et même droite.*

Que cela ne soit pas; prolongeons CB vers E; on aura $ABC + ABD = 2\,D$ (*); mais $ABC + ABE = 2\,D$; donc $ABC + ABD = ABC + ABE$. On a donc, en supprimant ABC de part et d'autre, $ABD = ABE$, ce qui est absurde; donc, etc.

39. *D'un point* A (fig. 13) *pris dans une droite* BC, *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire.*

Supposons qu'on puisse en élever deux, les droites AD, AE, par exemple; on aura $DAC > EAC$. Mais $DAC = DAB$, et $EAC = EAB$; donc $DAB > EAB$, ce qui est absurde; donc, etc.

40. *D'un point* A (fig. 14), *pris au-dessus d'une droite* EF *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire.*

Supposons qu'on puisse en abaisser deux, les droites AB, AC par exemple. Prolongeons AB, faisons BD égal à AB, et

(*) La lettre D désigne un angle droit.

menons *CD*. Renversons le triangle *CBA* sur le triangle *CBD*, la droite *CB* restant commune, la droite *AB* tombera sur la droite *BD*, puisque l'angle *CBA* est égal à l'angle *CBD*, et le point *A* tombera sur le point *D*, puisque $AB = BD$; donc la droite *CA* tombe sur *CD*; donc l'angle *BCA* = l'angle *BCD*. Mais l'angle *BCA* est droit; donc l'angle *BCD* est droit aussi; donc la ligne *ACD* est une ligne droite (38), ce qui est absurde (29); donc, etc.

41. *Les droites qui partent d'un même point, d'une perpendiculaire, et qui s'en écartent également, sont égales.*

Que les droites *AF*, *AD* (*fig.* 15) partent du point *A* de la droite *AE* perpendiculaire sur *CD*, et que *EF* soit égal à *ED*; je dis que *AF* est égal à *AD*.

Renversons la figure *AEF* sur la figure *AED*, la droite *AE* restant commune; la droite *EF* tombera sur *ED*, à cause que l'angle *AEF* est égal à l'angle *AED*, et le point *F* tombera sur le point *D*, à cause que *EF* est égal à *ED*; donc la droite *AF* s'applique exactement sur la droite *AD*, donc ces deux droites sont égales; donc, etc.

42. *Lorsque deux droites, qui partent d'un même point d'une perpendiculaire, s'en écartent inégalement, celle qui s'en écarte davantage est la plus longue.*

Que la droite *AE* soit perpendiculaire sur la droite *CD*, et que la droite *AC* s'écarte plus de la perpendiculaire que la droite *AD*; je dis que la droite *AC* est plus longue que la droite *AD*.

Sur le prolongement de la droite *AE*, prenons la droite *EB* égale à la droite *AE*; faisons *EF* égal à *ED*, et menons les droites *CB*, *FB*, *AF*. La droite *AF* sera égale à *AD* et la droite *CA* égale à *CB* (41). Prolongeons la droite *BF* jusqu'à la droite *CA*. La droite *FA* étant plus courte que la somme des deux droites *FG*, *GA*, nous aurons $BF + FA < BF + FG + GA$, ou $BF + FA < BG + GA$. Pareillement la droite *BG* étant plus courte que la somme des droites *BC*, *CG*, nous

aurons $BG + GA < BC + CG + GA$, ou $BG + GA < BC + CA$. Mais $BF + FA < BG + GA$; donc à plus forte raison $BF + FA < BC + CA$. Donc la somme des deux droites $BC + CA$ est plus grande que la somme des droites $BF + FA$. Donc la droite CA, moitié de la somme des deux droites $BC + CA$, est plus grande que la droite FA, moitié de la somme des deux droites $BF + FA$. Donc lorsque deux droites qui partent d'un même point d'une perpendiculaire s'en écartent inégalement, celle qui s'en écarte davantage est la plus longue.

43. *La perpendiculaire est la droite la plus courte qu'on puisse mener d'un point sur une droite.*

Que la droite AE soit perpendiculaire sur FD. Supposons que la droite AF soit plus courte que AE; prolongeons la droite AE jusqu'à ce que son prolongement EB soit égal à la droite AE, et menons les droites FA, FB.

La droite AB étant plus courte que la somme des deux droites FA, FB, il est évident que la moitié de la droite AB, ou la droite AE, sera plus courte que la moitié de la somme des deux droites FA, FB, qui est égale à la droite AF; donc la droite AE est plus courte que la droite AF.

Concluons de là que d'un même point, on ne sauroit mener à une même droite trois droites égales, parce qu'il faudroit qu'il y eût du même côté de la perpendiculaire deux obliques égales, ou que deux obliques fussent égales à la perpendiculaire; ce qui est impossible.

44. *Il n'y a que les points de la perpendiculaire* CD (*fig.* 16) *sur le milieu d'une droite* AB *qui soient également éloignés de* A *et de* B.

Que le point E soit placé hors de la perpendiculaire CD; je dis que ce point est plus éloigné du point A que du point B.

Menons les droites EB, FA, FB. Puisque la droite FA est égale à la droite FB (40), il est évident que $FB + FE$, ou AE est égal à $FB + FE$. Mais $FB + FE$ est plus grand que EB; donc la droite AE est plus grande que la droite EB.

Donc le point E est plus éloigné du point A que du point B. On démontreroit de la même manière que tout autre point, placé de l'autre côté de la perpendiculaire CD, seroit plus éloigné du point B que du point A. Donc il n'y a que les points de la perpendiculaire sur le milieu de AB qui soient également éloignés de A et de B. (L. 33—45).

45. *Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

Car si une droite rencontroit une circonférence de cercle en trois points, ces trois points seroient également distans du centre, et l'on auroit alors trois droites égales, menées d'un même point sur une même droite, ce qui est impossible (43).

46. *Dans un même cercle, le plus petit arc est soutendu par la plus petite corde.*

Que dans le cercle BDA (*fig.* 17), l'arc BD soit plus petit que l'arc BA; je dis que la corde BD est plus petite que la corde BA.

Menons les rayons CB, CD, CA. L'arc BD étant plus petit que l'arc BA, l'angle BCD sera plus petit que l'angle BCA; le rayon CD rencontrera donc la corde AB en un point quelconque E. Puisque la corde BD est plus petite que $BE + ED$, et que le rayon CA est plus petit que $CE + EA$, on aura $BD + CA < BE + ED + CE + CA$, ou bien $BD + CA < BA + CD$. Donc si l'on retranche de part et d'autre les droites égales CA, CD, on aura $BD < BA$. Donc dans un même cercle, le plus petit arc est soutendu par la plus petite corde.

47. *Dans un même cercle, la plus petite corde est soutendue par le plus petit arc.*

Que dans le cercle BDA, la corde BD soit plus petite que la corde BA; je dis que l'arc BD est plus petit que l'arc BA.

Car si l'arc BD n'étoit pas plus petit que l'arc FG, l'arc BD seroit égal à l'arc FG ou plus grand. L'arc BD n'est pas égal à l'arc FG; car alors la corde BD seroit égale à la corde

FG (31), ce qui n'est point. L'arc *BD* n'est pas plus grand que l'arc *FG*; car alors la corde *BD* seroit plus grande que la corde *FG* (46), ce qui n'est pas ; donc l'arc *BD* n'est point égal à l'arc *FG*, ni plus grand ; donc l'arc *BD* est plus petit que l'arc *FG*. Donc dans un même cercle la plus petite corde soutend le plus petit arc.

48. *Toute corde est plus petite que le diamètre.*

Car si l'on mène deux rayons aux extrémités d'une corde, cette corde sera plus petite que la somme de ces deux rayons, et par conséquent plus petite que le diamètre. (L. 47—50).

49. *Une perpendiculaire sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc.*

Que la droite *CD* (*fig.* 16) soit perpendiculaire sur le milieu de la corde *AB*; je dis 1° que *CD* passera par le centre.

Que cela ne soit point, et que le centre soit en *E*. Menons les droites *EA*, *EB*, *FB*.

Puisque $FA = FB$ (41), on aura $AF + FE = FB + FE$, c'est-à-dire $AE = FB + FE$; mais $FB + FE > EB$; donc $AE > EB$; mais au contraire $AE = EB$, puisque le point *E* est le centre, ce qui est absurde. Donc il est impossible que la droite *AC* ne passe pas par le centre. Donc, etc.

Je dis 2° que la perpendiculaire passe par le milieu de l'axe.

Car les droites *DA*, *DB* étant égales, les arcs *DA*, *DB* sont nécessairement égaux (31); donc le point *D* est le milieu de l'arc *AB*. (L. 53—59).

50. *Lorsqu'une tangente est parallèle à une corde, le point de contact est au milieu de l'arc.*

Que la tangente *GH* (*fig.* 16) soit parallèle à la corde *AB*; je dis que le point de contact *D* est au milieu de l'arc *AB*.

Au point de contact *D*, menons le rayon *FD*; ce rayon sera perpendiculaire sur la tangente *GH*, et sur la corde *AB*. Mais un rayon perpendiculaire sur une corde passe par le milieu de l'arc (49); donc le point *D* est au milieu de l'arc *ADB*. (L. 60—61).

51. *Un angle qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes, a toujours pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Cette proposition a trois cas; car il peut arriver qu'un des côtés de cet angle passe par le centre, ou que le centre se trouve entre les deux côtés de l'angle, ou qu'enfin le centre soit hors des deux côtés.

Premier cas. Qu'un des côtés *AB* de l'angle *BAD* (*fig.* 18) passe par le centre; menons le diamètre *EF* parallèle au côté *AD*. L'angle *BAD* étant égal à l'angle *BCF* (B. 37), ces deux angles auront la même mesure. Mais l'angle *BCF* a pour mesure l'arc *BF* (*Cor.* 36); donc l'angle *BAD* aura aussi pour mesure l'arc *BF*. Mais l'arc *BF* est égal à l'arc *EA* (33), et l'arc *EA* est égal à l'arc *FD*, parce que les cordes *EF*, *AD* sont parallèles (B. 69); donc l'arc *BF* est égal à l'arc *FD*; donc l'arc *BF* est égal à la moitié de l'arc *BD*. Mais l'angle *BAD* a pour mesure l'arc *BF*; donc l'angle *BAD* a pour mesure la moitié de l'arc *BD*.

Deuxième cas. Que le centre soit entre les deux côtés de l'angle *BAD* (*fig.* 19). Par le sommet de cet angle, et par le centre menons la droite *AE*; cette droite partagera l'angle *BAD* en deux autres *BAE* et *EAD*. Or, l'angle *BAE* a pour mesure la moitié de l'arc *BE* et l'angle *EAD*, la moitié de l'arc *ED*; donc les deux angles *BAE*, *EAD*, pris ensemble, c'est-à-dire, l'angle total *BAD* a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs *BE*, *ED*, c'est-à-dire, la moitié de l'arc *BD*.

Troisième cas. Que le centre soit hors des deux côtés de l'angle *BAD* (*fig.* 20). Par le sommet de l'angle *BAD*, et par le centre, menons la droite *AE*. L'angle *EAD* aura pour mesure la moitié de l'arc *ED*, c'est-à-dire, la moitié de l'arc *EB*, plus la moitié de l'arc *BD*. Mais l'angle *EAB* a pour mesure la moitié de l'arc *EB*; donc l'angle *BAD* aura pour mesure la

moitié de l'arc *BD*, sans quoi l'angle total *EAD* n'auroit point pour mesure la moitié de l'arc *ED*. Donc, dans tous les cas, un angle qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes, a toujours pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

52. *Un angle qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par une tangente et par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc soutendu par la corde.*

Que la droite *CB* touche la circonférence *ECD* (*fig.* 21) au point *C*; menons une corde quelconque *CD*; je dis que l'angle *BCD* a pour mesure la moitié de l'arc *CD*.

Menons la corde *DE* parallèle à la tangente *CB*. L'angle *DCB* sera égal à l'angle *CDE*. Mais l'angle *CDE* a pour mesure la moitié de l'arc *CE* compris entre ses côtés (51); donc l'angle *BCD* qui lui est égal aura aussi pour mesure la moitié de l'arc *CE*. Or, l'arc *CE* est égal à l'arc *CD*; donc l'angle *BCD* a pour mesure la moitié de l'arc *CD*.

L'angle *ACD*, qui est le supplément de l'angle *BCD*, a pour mesure la moitié de l'arc *CED*. En effet, les deux angles *DCB*, *DCA* qui valent ensemble 180 degrés, ont pour mesure la moitié de la circonférence entière. Mais l'angle *DCB* a pour mesure la moitié de l'arc *CD*; donc l'angle *ACD* a pour mesure la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié de l'arc *CED*. (L. 65—72).

53. *Sur une droite donnée décrire un segment de cercle qui reçoive un angle égal à un angle donné.*

Soit *AB* (*fig.* 22) la droite donnée, et *M* l'angle donné. Prolongeons la droite *AB* vers *F*, et faisons au point *B* l'angle *GBF* égal à l'angle *M*; par le point *B*, menons la droite *BC* perpendiculaire sur *GH*; du milieu de *AB*, conduisons la droite *EC* perpendiculaire sur *AB*; et du point *C*, et avec le rayon *CB*, décrivons une circonférence de cercle; je dis que *ADB* est le segment demandé.

En effet, l'angle *ABH*, qui est formé par une corde et une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc *AIB* (52); mais l'angle *ADB* a aussi pour mesure la moitié du même arc (51); donc l'angle *ADB* est égal à l'angle *ABH*; mais l'angle *ABH* est égal à l'angle *GBF*, et celui-ci est égal à l'angle *M*; donc l'angle *ADB* est égal à l'angle *M*. Donc sur la droite donnée *AB* on a décrit un segment de cercle qui reçoit un angle égal à un angle donné *M*.(L.73—81).

54. *Deux parallèles comprises entre deux parallèles sont égales.*

Que les parallèles *AB*, *CD* (*fig.* 23) soient comprises entre les parallèles *AC*, *BD*; je dis que les parallèles *AB*, *CD* sont égales entr'elles.

Joignons *AD*. Le côté *AD* est commun aux deux triangles *ADB*, *ADC*; l'angle *ADB* est égal à l'angle *DAC*, et l'angle *DAB* égal à l'angle *ADC*, parce que ces angles sont alternes-internes. Donc les deux triangles *ADB*, *ADC* sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc les côtés *AB*, *CD* opposés aux angles égaux *ADB*, *DAC* sont égaux. Donc, etc.

55. *Deux droites, qui joignent les extrémités de deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles.*

Soient les droites égales et parallèles *AC*, *BD*; joignons leurs extrémités par les droites *AB*, *CD*; je dis que les droites *AB*, *CD* sont égales et parallèles.

Joignons *AD*. L'angle *ADB* est égal à l'angle *DAC*, ces deux angles étant alternes-internes; le côté *AD* est commun aux deux triangles *ABD*, *ACD*, et le côté *AC* est égal au côté *BD* par supposition; donc les deux triangles *ADB*, *ADC* sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Donc les deux côtés *AB*, *CD* opposés aux angles égaux *ADB*, *DAC* sont égaux. Mais les angles *DAB*, *ADC* sont égaux; donc les deux droites *AB*, *CD* sont parallèles. Donc, etc. (L. 83—100).

56. *On appelle triangles semblables ceux qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues proportionnels : les côtés homologues de deux triangles semblables sont ceux qui sont opposés à des angles égaux.*

57. *Deux triangles dont les angles sont égaux chacun à chacun ont leurs côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.*

Soient les deux triangles *ABC*, *DEF* (*fig.* 24). Que l'angle *A* soit égal à l'angle *D*, l'angle *B* égal à l'angle *E*, et l'angle *C* égal à l'angle *F*; je dis que *CA* : *FD* :: *CB* : *FE* :: *AB* : *DE*.

Supposons d'abord que les côtés *CA*, *FD* sont commensurables entr'eux, et qu'ils soient entr'eux comme les nombres 7 et 4. Faisons *CG* égal à *FD*, et par le point *G*, menons la droite *GH* parallèle à *AB*. Partageons le côté *CA* en sept parties égales; le côté *CG* contiendra quatre de ces parties. Par les points de division, menons des parallèles au côté *AB*, et par les points où ces parallèles rencontrent le côté *CB*, menons des parallèles au côté *CA*.

Les triangles *Cfa*, *fgq*, *ghr*, etc. sont égaux entr'eux, parce qu'ils ont chacun un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc les droites *Cf*, *fg*, *gh*, etc. sont égales entr'elles. Donc le côté *CB* sera partagé en sept parties égales par les parallèles *af*, *bg*, *ch*, etc., et la droite *CH* contiendra quatre de ces parties. Mais les droites égales *af*, *qg*, *rh*, etc. sont égales aux droites *Al*, *lm*, *mn*, etc. (54); donc le côté *AB* sera aussi partagé en sept parties égales, et la droite *AI* ou *GH* contiendra quatre parties de *AB*, on aura donc,

$$CA : CG :: CB : CH :: AB : GH.$$

Mais le triangle *DEF* est égal au triangle *GHC*, parce que ces deux triangles ont un côté égal de part et d'autre adjacent à des angles égaux chacun à chacun; donc

$$CA : FD :: CB : FE :: AB : DE.$$

On feroit le même raisonnement, quel que fût le rapport des côtés *CA*, *FD*, pourvu que ces côtés fussent commensurables entr'eux.

Supposons à présent que les côtés *CA*, *FD* (*fig.* 25) ne soient pas commensurables entr'eux. Faisons la droite *CG* égale à la droite *FD*, et menons la droite *GH* parallèle à *AB*; je dis qu'on aura *CA* : *CG* :: *CB* : *CH*.

Car si ces quatre droites ne forment pas une proportion, c'est parce que le quatrième terme est trop grand ou trop petit.

Qu'il soit trop petit; et supposons qu'on ait : *CA* : *CG* :: *CB* : *CI*. Partageons la droite *CB* en parties égales, mais assez petites pour qu'il y ait un point de division entre le point *H* et le point *I* (35). Que *L* soit ce point. Par le point *L*, menons la droite *LK* parallèle à *BA*. Puisque les côtés *CB*, *CL* sont commensurables entr'eux, on aura : *CB* : *CL* :: *CA* : *CK*, ou bien *CA* : *CK* :: *CB* : *CL*. Mais par supposition, *CA* : *CG* :: *CB* : *CI*. Donc *CK* : *CL* :: *CG* : *CI*. Mais le premier terme est plus grand que le troisième, et le second est plus petit que le quatrième; donc ces quatre droites ne forment pas une proportion. Donc *CA* n'est pas à *CG*, comme *CB* est à une droite plus grande que *CH*.

Par un raisonnement semblable, on démontreroit que *CA* n'est pas à *CG*, comme *CB* est à une droite plus petite que la droite *CH*. Donc *CA* : *CG* :: *CB* : *CH*. Mais la droite *CG* est égale à *FD*, et la droite *CH* égale à *FE*; donc *CA* : *FD* :: *CB* : *FE*.

On démontreroit de la même manière que *CB* : *FE* :: *AB* : *DE*. Donc *CA* : *FD* :: *CB* : *FE* :: *AB* : *DE* :; donc deux triangles dont les angles sont égaux chacun à chacun, ont leurs côtés homologues proportionnels.

Puisque quand deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle chacun à chacun, le troisième angle de l'un est égal au troisième de l'autre, nous conclurons que

deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

58. *Deux triangles qui ont leurs côtés proportionnels sont équiangles, et par conséquent semblables.*

Soient les deux triangles *ABC*, *DEF* (*fig.* 26); que *AB* : *DE* :: *BC* : *EF* :: *AC* : *DF*; je dis que les triangles *ABC*, *DEF* sont équiangles.

Sur *EF*, et aux points *E* et *F*, faisons l'angle *FEG* égal à l'angle *B*, et l'angle *EFG* égal à l'angle *BCA*; les deux triangles *BCA*, *EFG* seront semblables (57); donc *AB* : *BC* :: *GE* : *EF*; mais *AB* : *BC* :: *DE* : *EF*; donc *DE* : *EF* :: *GE* : *EF*. Donc *DE* est égal à *EG*, à cause que les conséquents sont égaux. La droite *DF* est égale à la droite *GF*, par la même raison; donc les deux triangles *DEF*, *GEF* sont égaux et semblables; donc les angles *DEF*, *DFE* sont égaux aux angles *GEF*, *GFE*, chacun à chacun; mais les angles *GEF*, *GFE* sont égaux aux angles *ABC*, *ACB*, chacun à chacun; donc les angles *ABC*, *ACB* sont égaux aux angles *DEF*, *DFE*, chacun à chacun; donc les deux triangles *ABC*, *DEF* sont équiangles et par conséquent semblables. Donc, etc.

59. *Deux triangles qui ont chacun un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont équiangles et par conséquent semblables.*

Soient les deux triangles *ABC*, *DEF*; que l'angle *ABC* soit égal à l'angle *DEF*, et que *BC* : *BA* :: *EF* : *ED*; je dis que les deux triangles *ABC*, *DEF* sont équiangles et par conséquent semblables.

Sur la droite *EF*, et aux points *E* et *F*, faisons les angles *GEF*, *GFE* égaux aux angles *ABC*, *ACB*, chacun à chacun; les deux triangles *ABC*, *GEF* seront équiangles; donc *BC* : *BA* :: *EF* : *EG*; mais *BC* : *BA* :: *EF* : *ED*; donc *EF* : *EG* :: *EF* : *ED*; donc *EG* est égal à *ED*; mais le côté *EF* est commun, et l'angle *DEF* est égal à *GEF*, puisque ces

deux angles sont égaux chacun à l'angle *ABC*; donc les deux triangles *DEF*, *DFE* sont égaux et semblables; donc l'angle *GFE* est égal à l'angle *DFE*; donc l'angle *ACB* est égal à l'angle *DFE*; mais l'angle *ABC* est égal à l'angle *DEF*; donc les deux triangles *ABC*, *DEF* sont équiangles et par conséquent semblables. Donc, etc.

60. *Si dans les deux triangles* ABC, DEF (fig. 27), *l'angle* A *est égal à l'angle* D; *si* DE *est à* EF *comme* AB *est à* BC; *et si chacun des angles* C *et* F *est en même temps plus petit, ou n'est pas plus petit qu'un droit, les triangles* ABC, DEF *seront équiangles et par conséquent semblables.*

Supposons d'abord que chacun des angles *C*, *F*, soit plus petit qu'un droit; je dis que l'angle *ABC* est égal à l'angle *E*.

Que cela ne soit point, et que le premier soit plus grand; faisons l'agle *ABG* égal à l'angle *E*. Les deux triangles *ABG*, *DEF* seront équiangles; donc *AB* : *BG* :: *DE* : *EF*. Mais par supposition *DE* : *EF* :: *AB* : *BC*; donc *AB* : *BG* :: *AB* : *BC*; donc *BC*=*BG*; donc l'angle aigu *BCG* est égal à l'angle *BGC*; donc l'angle *BGA* est obtus; mais l'angle *BGA* est égal à l'angle *F*; donc l'angle *F* est obtus; mais il est aigu, ce qui est absurde; donc les angles *ABC*, *DEF* ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'Angle *A* est égal à l'angle *D*; donc les deux triangles *ABC*, *DEF* sont équiangles.

Supposons à présent que chacun des angles *C*, *F* n'est pas plus petit qu'un droit.

Nous démontrerons de la même manière que *BC* est égal à *BG*, et nous conclurons de-là que chacun des angles *BCG*, *BGC* n'est pas plus petit qu'un droit, ce qui est absurde; donc les angles *ABC*, *DEF* ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux; donc les triangles *ABC*, *DEF* sont équiangles et par conséquent semblables; donc, etc.

61. *Deux triangles qui ont leurs côtés parallèles sont semblables.*

Car deux triangles qui ont leurs côtés parallèles ont leurs angles égaux chacun à chacun, parce que les angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux entr'eux (B. 43).

Il est évident que les côtés homologues sont les côtés parallèles.

62. *Deux triangles qui ont leurs côtes perpendiculaires les uns sur les autres sont semblables.*

Que le côté *AB* du triangle *ABC* (*fig.* 28) soit perpendiculaire sur le côté *ab* du triangle *abc*, le côté *AC* sur le côté *ac*, et le côté *BC* sur le côté *bc*. Dans le quadrilatère *ADaE*, les deux angles *ADa*, *AEa* sont droits; mais les quatre angles d'un quadrilatère valent ensemble quatre angles droits (B. 86.); les deux angles *DAE*, *DaE* valent donc deux angles droits. Donc l'angle *DaE* est le complément de l'angle *A*. Mais l'angle *DaE* est aussi le complément de l'angle *Dac*; donc l'angle *DbC* est égal à l'angle *A*.

On démontreroit de la même manière que l'angle *abc* est égal à l'angle *B*, et l'angle *acb* égal à l'angle *C*. Donc les deux triangles *ABC*, *abc* ont leurs angles égaux chacun à chacun. Donc les triangles *ABC*, *abc* sont semblables

Il est évident que les côtés homologues sont les côtés qui sont perpendiculaires les uns sur les autres.

La démonstration qu'on vient de donner suppose que le triangle *abc* est toût entier dans le triangle *ABC*, et qu'aucun de ses angles n'est placé sur les côtés du triangle *ABC*. Si le triangle *abc* avoit toute autre position, on construiroit un troisième triangle dont les côtés fussent parallèles aux côtés du triangle *ABC*, et qui comprît les triangles *ABC*, *abc*, de manière qu'aucun de leurs angles ne fût placé sur les côtés du troisième. Il est évident qu'alors les côtés du triangle *abc* seroient perpendiculaires sur les côtés du troisième triangle; donc ces deux triangles seroient semblables. Mais le triangle *ABC* seroit aussi semblable au troisième triangle (61); donc les triangles *ABC*, *abc* seroient semblables.

63. *Si par un point* D (fig. 29) *pris à volonté dans un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mène une droite* DI *parallèle au côté* FL, *les deux côtés* AF *et* AL, *seront coupés proportionnellement, c'est-à-dire, qu'on aura toujours* AD : AF :: AI : AL; AD : DF :: AI : IL.

En effet, la droite *DI* étant parallèle au côté *FL*, les deux triangles *FLA*, *DIA* sont semblables : on a donc *AD* : *AF* :: *AI* : *AL*. Menons la droite *IH* parallèle au côté *AF*, le triangle *IHL* sera semblable au triangle *ADI*; on aura donc *AD* : *IH* :: *AI* : *IL*. Mais *DF* est égal au côté *IH* (54); donc *AD* : *DF* :: *AI* : *IL*.

64. *Si une droite partage en deux parties égales un angle d'un triangle, cette droite coupe le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés correspondans; et si une droite, menée d'un des angles d'un triangle, coupe le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés correspondans, cette droite partage cet angle en deux parties égales.*

Que la droite *AD* (*fig*. 30) partage l'angle *BAC* du triangle *BAC* en deux parties égales; je dis que *BD* : *DC* :: *AB* : *AC*.

Par le point *B*, menons *BE* parallèle à *AD*, et prolongeons *CA* vers *E*. A cause des parallèles *AD*, *BE*, l'angle *DAC* est égal à l'angle *E* (B. 57), et l'angle *EBA* égal à l'angle *BAD* (B. 38). Mais l'angle *DAC* est égal à l'angle *BAD*. Donc l'angle *E* est égal à l'angle *EBA*. Donc la droite *EA* est égal à la droite *AB* (B. 77). Mais, à cause que les droites *CE*, *CB* sont coupées proportionnellement par la droite *AD*, on a *BD* : *DC* :: *EA* : *AC* (63). Donc *BD* : *DC* :: *BA* : *AC*. Donc la droite *AD* partage le côté *BC* en deux parties *BD*, *DC*, proportionnelles aux côtés correspondans *BA*, *AC*.

A présent que la droite *AD* coupe le côté *BC* en deux parties, de manière que *BD* : *DC* :: *BA* : *AC*; je dis que cette droite partage l'angle *BAC* en deux parties égales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque *AD* est parallèle à *BE*, on a *BD* : *DC* :: *EA* : *AC* (63). Mais on a par

supposition $BD : DC :: BA : AC$; donc $EA : AC :: BA : AC$. Donc EA est égal à BA. Donc l'angle ABE est égal à AEB (B. 77). Mais l'angle BEA est égal à l'angle DAC, et l'angle ABE égal à l'angle BAD; donc l'angle DAB est égal à l'angle DAC. Donc la droite AD partage l'angle BAC en deux parties égales.

65. *Si l'on coupe proportionnellement aux points* B, C, D, E, F (fig. 31), *les droites* AG, AH, AI, AK, AL, *menées du point* A *à différens points de la droite* GL, *la ligne qui passera par les points* B, C, D, E, F, *sera une ligne droite.*

Puisque les droites AG, AH, etc., sont coupées proportionnellement aux points B, C, etc., les droites BC, CD, etc., sont parallèles à la droite GL. Cela posé, on a $BCH + GHC = 2D$ (B. 401); mais $GHC = HCD$; donc $BCH + HCD = 2D$; donc la ligne BCD est une ligne droite (12).

On démontreroit de la même manière que les lignes CDE, DEF sont des lignes droites; donc la ligne $BCDEF$ est une ligne droite. Donc, etc. (L. 112, 115—127.)

66. *Si d'un point pris hors du cercle, on mène une sécante et une tangente, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.*

Du point A (*fig.* 32) pris hors du cercle BCD, menons la tangente AB et la sécante AC. Je dis que $AC : AB :: AB : AD$.

Menons les cordes BC, BD. Les deux triangles ABC, ADB seront semblables. En effet, l'angle A est commun aux deux triangles; les deux angles ACB, ABD sont égaux, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc BD (51—52); donc ces deux triangles sont semblables; donc $AC : AB :: AB : AD$. Donc la tangente AB est moyenne proportionnelle entre la sécante AC et sa partie extérieure AD. (L. 129 — 130).

67. *Inscrire dans un cercle donné un pentagone régulier.*

Soit ABD (*fig.* 33.) le cercle donné; il faut inscrire dans ce cercle un pentagone régulier.

Je divise le rayon *AC* en moyenne et extrême raison au point *E* (B. 130) ; je porte le plus grand segment *EC* de *A* en *B* et de *B* en *D*, et je joins *AB*, *AD;* je dis que la corde *AB* est le côté du décagone régulier, et la corde *AD* celui du pentagone régulier.

Je mène la droite *BE* et le rayon *BC*. Les triangles *ABC*, *ABE* sont semblables. En effet, l'angle *EAB* est commun, et à cause que le rayon *AC* est partagé en moyenne et extrême raison au point *E*, on a *AC* : *EC* :: *EC* : *AE*. Mais la droite *AB* est égale à la droite *EC;* donc *AC* : *AB* :: *AB* : *AE;* les triangles *ABC*, *AEB* ont donc un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ; ils sont donc semblables. Mais le triangle *ACB* est isocèle ; donc le triangle *ABE* l'est aussi ; donc la droite *AB* est égale à la droite *BE*. Mais la droite *BE* est égale à la droite *EC*, puisque celle-ci est égale à la droite *AB;* donc le triangle *BEC* est aussi isocèle. Donc l'angle *C* est égal à l'angle *EBC*. Mais l'angle *C* est égal à l'angle *ABE ;* donc l'angle *C* est la moitié de l'angle *ABC;* mais l'angle *BAC* est égal à l'angle *BAC;* donc l'angle *C* est aussi la moitié de l'angle *BAC*. Donc l'angle *C* est la cinquième partie des trois angles du triangle *ACB*, c'est-à-dire, la cinquième partie de deux angles droits, ou la dixième partie de quatre angles droits. Donc l'arc *AB* est la dixième partie de la circonférence ; et par conséquent la corde *AB* est le côté du décagone régulier. Donc la corde *AD* est le côté du pentagone régulier. Donc dans un cercle donné on a inscrit un pentagone régulier (L. 131—136).

68. *Si dans deux polygones semblables* ABCDE, abcde (fig. 34), *les deux droites* LM, lm *sont également inclinées à l'égard de deux côtés homologues* AE, ae, *et terminées à deux points* L, l *semblablement placés dans ces côtés, les droites* LM, lm *seront entr'elles, comme deux côtés homologues quelconques de ces polygones.*

Menons les droites *LD*, *ld*. Puisque les points *L*, *l* sont semblablement placés dans les côtés *AE*, *ae*, on aura *EA* : *ea* ::

EL : *el* :: *ED* : *ed*. Les deux triangles *LED*, *led* sont donc semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ; donc les angles *DLM*, *dlm* sont égaux; car si des deux angles égaux *ELM*, *elm*, on retranche les angles égaux *ELD*, *eld*, les angles restans *DLM*, *dlm*, seront égaux. Les angles *LDM*, *ldm* sont égaux par la même raison. Donc les triangles *LMD*, *lmd*, ont deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont semblables; donc *LM* : *lm* :: *LD* : *ld*; mais les deux triangles semblables *LDE*, *lde*, donnent *LD* : *ld* :: *ED* : *ed*; donc *LM* : *lm* :: *ED* : *ed*. Donc les droites *LM*, *lm* sont entr'elles comme les côtés homologues *ED*, *ed*, et par conséquent comme deux côtés homologues quelconques de ces deux polygones.

69. *Si dans deux polygones semblables, les deux droites* LM, lm *sont terminées à des points* L, M, l, m, *semblablement placées à l'égard de quatre côtés homologues* AE, DC, ae, dc, *ces droites seront entr'elles comme deux côtés homologues quelconques de ces deux polygones.*

Puisque les points *L*, *l* sont semblablement placés dans les deux côtés homologues *AE*, *ae*, on a *EA* : *ea* :: *EL* : *el* :: *ED* : *ed*; les deux triangles *LED*, *led* sont donc semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; donc *LD* : *ld* :: *ED* : *ed*. Les points *M*, *m* étant aussi semblablement placés dans les côtés homologues *DC*, *dc*, on a *DC* : *dc* :: *DM* : *dm* :: *ED* : *ed* :: *LD* : *ld*. Mais l'angle *LDC* est égal à l'angle *ldc*; donc les deux triangles *LMD*, *lmd* sont semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; donc *LM* : *lm* :: *LD* : *ld* :: *ED* : *ed*. Donc les deux droites *LM*, *lm* seront entr'elles comme les côtés *ED*, *ed*, et par conséquent comme deux côtés homologues quelconques de ces deux polygones (L. 138 — 150) (L. 154 — 156).

SECONDE PARTIE.

70. *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Soient deux rectangles *ABCD*, *ABEF* (*fig.* 35) dont la hauteur commune soit la droite *AB* ; je dis que ces deux rectangles sont entr'eux comme leurs bases *BC*, *BE*.

Supposons d'abord que les bases *BC*, *BE* soient commensurables entr'elles, que *T* soit leur commune mesure, que *BC* soit égal à $7 \times T$, et *BE* égal à $4 \times T$.

Partageons la base *BC* en sept parties égales; chacune de ces parties sera égale à *T*, et la base *BE* contiendra quatre de ces parties. Par le point de division, élevons les perpendiculaires *HO*, *KP*, *LQ*, *MR*, *NS*. Le rectangle *ABCD* sera partagé en sept rectangles égaux, puisqu'ils auront des bases égales et des hauteurs égales; et le rectangle *ABEF* contiendra quatre de ces rectangles partiels. Donc le rectangle *ABCD* sera au rectangle *ABEF*, comme 7 est à 4, comme $7 \times T$ est à $4 \times T$, c'est-à-dire, comme *BC* est à *BE*.

Le raisonnement seroit le même, si le rapport des bases étoit différent. Donc les rectangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, lorsqu'elles sont commensurables entre elles.

Supposons actuellement que les bases *BC*, *BE* (*fig.* 36) soient incommensurables entr'elles.

Je dis qu'on aura toujours *ABCD* : *ABEF* :: *BC* : *BE*.

Car si cela n'est point, c'est parce que le quatrième terme est trop petit ou trop grand. Supposons qu'il soit trop petit et que l'on ait *ABCD* : *ABEF* :: *BC* : *BG*.

Partageons la droite *BC* en parties égales, mais assez petites pour qu'il y ait un point de division *H* entre *E* et *G* (35). Par ce point de division, menons la droite *HK* perpendiculaire sur *BC*.

BH étant commensurables entre elles, on aura,

$$BCD : ABHK :: BC : BH.$$

Mais on a, par supposition,

$$ABCD : ABEF :: BC : BG.$$

On aura donc, en changeant les moyens de place, les deux portions s vantes :

$$BCD : BC :: ABHK : BH$$
$$ABCD : BC :: ABEF : BG.$$

Donc

$$ABHK : \quad ABEF : BG.$$

Mais le premier terme grand que le troisième, tandis que le second est plu que le quatrième ; donc ces quatre quantités ne sont pas en portion. Mais elles seroient en proportion, si *ABCD* étoit *EF*, comme *BC* est à une droite plus grande que *BE* ; la droite *BE* n'est pas trop petite.

On démontreroit de la même manière que *ABCD* n'est pas à *ABEF*, comme *BC* est à une droite plus grande que *BE* ; donc *ABCD* : *ABEF* :: *BC* : *BE*. Donc les rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

COROLLAIRE I.

Puisque les parallélogrammes de même base et de même hauteur sont égaux (B. 141), il est évident qu'un parallélogramme quelconque est égal à un rectangle de même base et de même hauteur que lui ; donc les parallélogrammes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

COROLLAIRE II.

Puisqu'un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, il est évident que les triangles de même hauteur sont aussi entre eux comme leurs bases.

71. *Si deux parallélogrammes égaux ont un angle égal à un angle, les côtés placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels ; et si deux parallélogrammes ont un angle égal à un angle, et si les côtés placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux parallélogrammes sont égaux.*

Soient *AB*, *BC* (*fig.* 37) deux parallélogrammes égaux, ayant deux angles égaux en *B*; je dis que les côtés des parallélogrammes *AB*, *BC* placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que *DB* est à *BE* comme *BG* est à *BF*.

Plaçons la droite *BE* dans la direction de *BD* ; la droite *BG* sera dans la direction de *BF*, et achevons le parallélogramme *EF*.

Puisque le parallélogramme *AB* est égal au parallélogramme *BC*, *AB* sera à *EF* comme *BC* est à *EF*; mais *AB* est à *EF* comme *BD* est à *BE* (70); et *BC* est à *EF* comme *BG* est à *BF*; donc *DB* est à *BE* comme *BG* est à *BF* : donc les côtés des parallélogrammes *AB*, *BC* qui sont autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

Supposons à présent que les côtés autour des angles égaux soient réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que *BD* soit à *BE* comme *BG* est à *BF* : je dis que le parallélogramme *AB* est égal au parallélogramme BC.

Puisque *BD* est à *BE* comme *BG* est à *BF* ; que *BD* est à *BE* comme le parallélogramme *AB* est au parallélogramme *EF* (70); et que *BG* est à *BF* comme le parallélogramme *BC* est au parallélogramme *EF*, *AB* sera à *EF* comme *BC* est à *EF*; donc le parallélogramme *AB* est égal au parallélogramme *BC*, donc, etc.

72. *Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels ; et si deux triangles ont un angle égal à un angle,*

et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.

Soient *ABC*, *ADE* (*fig.* 58) deux triangles égaux, ayant un angle égal à un angle, savoir, l'angle *BAC* égal à l'angle *DAE*; je dis que les côtés des triangles *ABC*, *ADE* placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que *CA* est à *AD* comme *AE* est à *AB*.

Plaçons ces triangles de manière que la droite *AC* soit dans la direction de la droite *AD*, et la droite *AE* sera dans la direction de la droite *AB*; menons la droite *BD*.

Puisque le triangle *ABC* est égal au triangle *ADE*, le triangle *ABC* sera au triangle *BAD* comme le triangle *ADE* est au triangle *BAD*; mais le triangle *BAC* est au triangle *BAD* comme *CA* est à *AD* (70), et le triangle *ADE* est au triangle *BAD* comme *AE* est à *AB* : donc *AC* est à *AD* comme *AE* est à *AB*; donc les côtés des triangles *ABC*, *ADE*, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Supposons à présent que les côtés des triangles *ABC*, *ADE* soient réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que *AC* soit à *AD* comme *AE* est à *AB*; je dis que le triangle *ABC* est égal au triangle *ADE*. Menons *BD*.

Puisque *AC* est à *AD* comme *AE* est à *AB*, que *AC* est à *AD* comme le triangle *ABC* est au triangle *BAD* (70), et que *AE* est à *AB* comme le triangle *ADE* est au triangle *BAD*, le triangle *BAC* sera au triangle *ABD* comme le triangle *EAD* est au triangle *BAD*; donc le triangle *ABC* est égal au triangle *ADE*; donc, etc.

73. *Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les deux droites extrêmes est égal au rectangle compris sous les deux droites moyennes; et si le rectangle compris sous deux droites extrêmes est égal au rectangle compris sous deux droites moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.*

Soient *AB*, *CD*, *E*, *F* (*fig.* 39) quatre droites proportionnelles de manière qu'on ait *AB* est à *CD* comme *E* est à *F*; je dis que le rectangle compris sous les droites *AB*, *F* est égal au rectangle compris sous les droites *CD*, *E*.

Des points *A*, *C* et sur les droites *AB*, *CD* élevons les perpendiculaires *AG*, *CH*; faisons la droite *AG* égale à la droite *F*, et la droite *CH* égale à la droite *E*, et terminons les parallélogrammes *BG*, *DH*.

Puisque *AB* est à *CD* comme *E* est à *F*, que *E* est égal à *AG*, et que *F* est égal à *CH*, *AB* sera à *CD* comme *CH* est à *AG*; donc les côtés des parallélogrammes *BG*, *DH* placés autour de deux angles égaux sont réciproquement proportionnels; mais lorsque les côtés des parallélogrammes équiangles placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces parallélogrammes sont égaux entre eux (71); donc le parallélogramme *BG* est égal au parallélogramme *DH*; mais le parallélogramme *BG* est compris sous les droites *AB*, *F*, car *AG* est égal à *F*; et le parallélogramme *DH* est compris sous les droites *CD*, *E*; puisque *CH* est égal à *E*; donc le rectangle compris sous les droites *AB*, *F* est égal à celui qui est compris sous les droites *CD*, *E*. Donc, etc.

Si le rectangle compris sous les droites *AB*, *F* est égal à celui qui est compris sous les droites *CD*, *E*; je dis que ces quatre droites sont proportionnelles, c'est-à-dire que *AB* est à *CD* comme *E* est à *F*.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle compris sous les droites *AB*, *F* est égal à celui qui est compris sous les droites *CD*, *E*, que le rectangle *BG* est compris sous les droites *AB*, *F*, car *AG* est égal à *F*, et que le rectangle *DH* est compris sous les droites *CD*, *E*, car *CH* est égal à *E*, le parallélogramme *BG* sera égal au parallélogramme *DH*; mais ces deux parallélogrammes sont équiangles, et les côtés des parallélogrammes égaux et équiangles placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels (71); donc *AB* est

à *CD* comme *CH* est à *AG*; mais *CH* est égal à *E* et *AG* égal à *F* : donc *AB* est à *CD* comme *E* est à *F*; donc, etc.

74. *Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les droites extrêmes est égal au quarré de la droite moyenne; et si un rectangle compris sous deux droites extrêmes est égal au quarré d'une droite moyenne, ces trois droites sont proportionnelles.*

Soient *AB*, *CD*, *E* (*fig.* 40) trois droites proportionnelles, de manière que l'on ait *AB* est à *CD* comme *CD* est à *E* : je dis que le rectangle compris sous les droites *AB*, *E* est égal au quarré de *CD*.

Faisons la droite *F* égale à la droite *CD*.

Puisque *AB* est à *CD* comme *CD* est à *E*, et que *CD* est égal à *F*, la droite *AB* sera à la droite *CD* comme la droite *F* est à la droite *E*; mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les droites extrêmes est égal à celui qui est compris sous les droites moyennes (73); donc le rectangle compris sons les droites *AB*, *E* est égal à celui qui est compris sous les droites *CD*, *F*; mais celui-ci est égal au quarré de *CD*, car la droite *CD* est égale à la droite *F*; donc le rectangle compris sous les droites *AB*, *E* est égal au quarré de *CD*.

Si le rectangle compris sous les droites *AB*, *E* est égal au quarré de *CD*; je dis que *AB* est à *CD* comme *CD* est à *E*.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle compris sous les droites *AB*, *E* est égal au quarré de *CD*, et que le quarré de *CD* est un rectangle compris sous les droites *CD*, *F*, car *CD* est égal à *F*, le rectangle compris sous les droites *AB*, *E* est égal au rectangle compris sous les droites *CD*, *F*. Mais si un rectangle compris sous deux droites extrêmes est égal à un rectangle compris sous deux droites moyennes, ces quatre droites seront proportionnelles (73); donc *AB* est à *CD* comme *F* est à *E*; mais *CD* est égal à *F*; donc *AB* est à *CD*, comme *CD* est à *E*; donc, etc.

75. *Si trois droites sont proportionnelles, le quarré de la première est au quarré de la seconde, comme la première est à la troisième.*

Que les trois droites *A*, *B*, *C* (*fig.* 41) soient proportionnelles; je dis que le quarré de *A* est au quarré de *B* comme *A* est à *C*.

Sur les droites *DE*, *FG* égales aux droites *A*, *B*, construisons les quarrés *DH*, *FK*; sur la droite *LM* égale à *A*, construisons le quarré *LN*; et sur la droite *OP* égale à *C*, construisons le rectangle *OQ*, ayant pour hauteur une droite égale à *A*. Ce rectangle sera égal au quarré *FK* (70). Donc le quarré *DH* est au quarré *FK*, comme le quarré *LN* est au rectangle *OQ*; mais le quarré *LN* est au rectangle *OQ*, comme *LM* est à *OP*; donc le quarré *DH* est au quarré *FK*, comme *LM* est à *OP*. Mais les droites *DE*, *LM* sont chacune égales à la droite *A*, la droite *FG* est égale à la droite *B*, et la droite *OP* est égale à la droite *C*; donc le quarré de *A* est au quarré de *B*, comme *A* est à *C*; donc, etc.

76. *Les triangles semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Soient *ABC*, *DEF* (*fig.* 42) deux triangles semblables, ayant l'angle *B* égal à l'angle *E*. Supposons que *AB* soit à *DE* comme *BC* est à *FF*; je dis que les triangles *ABC*, *DEF* sont entr'eux comme les quarrés des côtés *BC*, *EF*.

Prenons une troisième proportionnelle *BG* aux droites *BC*, *EF*, de manière que *BC* soit à *EF* comme *EF* est à *BG*, et menons la droite *GA*.

Puisque *AB* est à *DE* comme *BC* est à *EF*, et que *BC* est à *EF* comme *EF* est à *BG*, *AB* sera à *DE* comme *EF* est à *BG*; donc les côtés des triangles *ABG*, *DEF* placés autour de deux angles égaux sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle et que les côtés placés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels (72); donc le triangle *ABG* est égal au triangle

DEF. Mais *BC* est à *EF* comme *EF* est à *BG*; donc $\overline{BC}^2$ est à $\overline{EF}^2$, comme *BC* est à *BG* (71). Mais *BC* est à *BG* comme le triangle *ABC* est au triangle *ABG* (70) : donc le triangle *ABC* est au triangle *ABG*, comme $\overline{BC}^2$ est à $\overline{EF}^2$; mais le triangle *ABG* est égal au triangle *DEF*; donc le triangle *ABC* est au triangle *DEF*, comme le quarré de *BC* est au quarré de *EF*; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit manifestement de là que si trois droites *BC*, *EF*, *BG* sont proportionnelles, la première sera à la troisième comme le triangle décrit sur la première est au triangle semblable qui est décrit semblablement sur la seconde, puisqu'il a été démontré que *BC* est à *BG* comme le triangle *ABC* est au triangle *ABG*, c'est-à-dire au triangle *DEF* (L. 161—163).

77. *Si les quatre droites* A, B, C, D *sont proportionnelles, et si les quatre droites* E, A, F, C *sont encore proportionnelles, les conséquens de la seconde proportion étant égaux aux antécédens de la première, chacun à chacun, on aura* E : B :: F : D.

Puisque $A : B :: C : D$, on aura $B \times C = A \times D$ (*) (73), on aura par la même raison $E \times C = A \times F$; donc $E \times C : B \times C :: A \times F : A \times D$; mais $E \times C : B \times C :: E : B$ (70) et $A \times F : A \times D :: F : D$; donc $E : B :: F : D$; donc, etc.

78. *Si l'on a quatre droites proportionnelles, et encore quatre autres droites proportionnelles, le rectangle sous les deux premiers antécédens est au rectangle sous les deux premiers conséquens, comme le rectangle sous les deux seconds antécédens, est au rectangle sous les deux seconds conséquens.*

(*) Au lieu d'écrire : *le rectangle sous les droites B, C*, on écrit : $B \times C$ au lieu d'écrire : *le quarré de la droite A*, on écrit : A^2.

Que $AB : CD :: EF : GH$ (*fig.* 54), et que $BK : DL :: FM : HN$; je dis que $AB \times BK : CD \times DL :: EF \times FM : GH \times HN$.

Cherchons une quatrième proportionnelle OP aux droites AB, CD, DL, et construisons un rectangle QO, dont la base QP soit égale à AB, et dont la hauteur soit OP; le rectangle QO sera égal au rectangle CL, puisque ces deux rectangles ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs (71); cherchons ensuite une quatrième proportionnelle RS aux droites EF, GH, HN, et construisons un rectangle TR, dont la base TS soit égale à EF, et dont la hauteur soit RS; le rectangle TR sera égal au rectangle GN.

Puisque $AB : CD :: DL : OP$, et que $EF : GH :: HN : RS$, on aura $DL : OP :: HN : RS$; mais $BK : DL :: FM : HN$; donc $BK : OP :: FM : RS$ (77); mais $BK : OP :: AK : QO$, parce que les rectangles AK, QO ont des bases égales, et $FM : RS :: EM : TR$, par la même raison; donc $AK : QO :: EM : TR$; mais $QO = CL$, et $TR = GN$; donc $AK : CL :: EM : GN$; donc, etc.

79. *Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, construites semblablement sur ces droites, seront proportionnelles; et si les figures rectilignes semblables et construites semblablement sur ces droites sont proportionnelles, ces droites seront proportionelles.*

Soient AB, CD, EF, GH (*fig.* 55) quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à CD comme EF est à GH. Construisons sur les droites AB, CD, les figures rectilignes semblables et semblablement placées KAB, LCD, et sur les droites EF, GH, construisons les figures semblables et semblablement placées MF, NH; je dis que la figure rectiligne KAB est à la figure rectiligne LCD comme la figure rectiligne MF est à la figure rectiligne NH.

Prenons une troisième proportionnelle O aux droites AB, CD, et une troisième proportionnelle P aux droites EF, GH.

Puisque $AB : CD :: EF : GH$, et que $CD : O :: GH : P$, on aura $AB : O :: EF : P$ (77); mais $AB : O :: KAB : LCD$ (75 *cor.*), et $EF : P :: MF : NH$; donc $KAB : LCD :: MF : NH$.

Si $KAB : LCD :: MF : NH$; je dis que $AB : CD :: EF : GH$.

Prenons une quatrième proportionnelle QR aux trois droites AB, CD, EF, et sur QR construisons la figure rectiligne SR, de manière qu'elle soit semblable à l'une et à l'autre des figures MF, NH, et semblablement placée.

Puisque $AB : CD :: EF : QR$; que les figures rectilignes KAB, LCD construites sur les droites AB, CD sont semblables et semblablement placées, et que les figures rectilignes MF, SR construites sur les droites EF, QR sont semblables et semblablement placées, on a $KAB : LCD :: MF : SR$, comme dans la première partie de cette proposition; mais on a supposé que $KAB : LCD :: MF : NH$; donc $MF : SR :: MF : NH$; donc NH est égal à SR; mais la figure NH est semblable à la figure SR et semblablement placée; donc GH est égal à QR (*lem. suiv.*); mais $AB : CD :: EF : QR$ et QR est égal à GH; donc $AB : CD :: EF : GH$; donc, etc.

LEMME.

Si des figures rectilignes sont égales et semblables, nous démontrerons de cette manière que leurs côtés homologues sont égaux entre eux.

Supposons que les figures rectilignes NH, SR soient égales et semblables, et que HG soit à GN comme QR est à QS; je dis que QR est égal à GH.

Car si ces droites sont inégales, une d'elles sera plus grande; supposons que la droite QR soit plus grande que la droite HG. Puisque $QR : QS :: HG : GN$, on a $QR : HG :: QS : GN$; mais QR est plus grand que HG; donc QS est plus grand que GN; donc la figure RS est plus grande que la figure HN; mais

lle lui est égale, ce qui est impossible; donc les droites QR, GH ne sont pas inégales : donc elles sont égales.

Il suit de-là que si quatre droites sont proportionnelles, les quarrés construits sur ces droites sont proportionnels; et que si quatre quarrés sont proportionnels, leurs côtés le sont aussi.

80. *Si l'on a deux rectangles* A $\times$ B, C $\times$ D, *et si l'on prend une quatrième proportionnelle* E *aux droites* B, C, D, *le rectangle* A $\times$ B *sera au rectangle* C $\times$ D *comme* A *est à* E.

En effet, puisque $B : C :: D : E$, $B \times E = C \times D$ (73); mais $A \times B : B \times E :: A : E$ (70); donc $A \times B : C \times D :: A : E$; donc, etc. (*).

81. *Dans tout triangle-rectangle le quarré construit sur l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés.*

Soit ABC (*fig.* 43) un triangle-rectangle dont l'angle droit est ACB; je dis que le quarré de AB est égal à la somme des quarrés de AC et de CB.

Sur les trois côtés du triangle-rectangle ABC, construisons les trois quarrés $ABED$, $BFGC$, $ACHI$; par le point C, menons la droite KL perpendiculaire sur l'hypothénuse AB, et prolongeons les côtés EB, FG.

Le côté BC est égal au côté BF; l'angle ACB est droit, ainsi que l'angle BFM, et l'angle ABC est égal à l'angle MBF, parce que ces deux angles ont le même complément CBM.

(*) Ordinairement on énonce ainsi cette proposition : *Les rectangles sont entre eux en raison composée des raisons des côtés contigus;* et c'est ainsi qu'elle est énoncée dans Euclide (*prop.* 23, *liv.* 6).

Si Euclide, au lieu de prendre les droites K, L proportionnelles aux côtés BC, CG, avait pris les côtés BC, CG eux-mêmes, il aurait conclu comme moi que le rectangle AC est un rectangle CF, comme la droite BC est une quatrième proportionnelle M aux droites CD, CG, CE, ce qui s'énonce ordinairement ainsi : les rectangles AC, CF sont entre eux en raison composée des raisons des côtés contigus.

Donc les deux triangles BAC, BMF sont égaux; donc le côté AB ou BE est égal au côté BM.

Le rectangle BL est égal au parallélogramme $KCBM$, parce qu'ils ont des bases égales BE, BM, et qu'ils sont compris entre les deux parallèles KL, ME. Mais le parallélogramme $KCBM$ est égal au quarré $CBFG$, parce qu'ils ont la même base CB, et qu'ils sont compris entre les deux parallèles BC, FK; donc le rectangle BL est égal au quarré $CBFG$.

On démontrerait, de la même manière, que le rectangle AL est égal au quarré $ACHI$; donc la somme des deux rectangles BL, AL, ou le quarré $ABED$ construit sur l'hypothénuse, est égal à la somme des deux quarrés $CBFG$, $CAIH$, construits sur les deux autres côtés.

82. *Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, l'angle compris entre ces deux derniers côtés est droit.*

Que le quarré du côté BC du triangle ABC (*fig.* 44) soit égal à la somme des quarrés des côtés AB, AC; je dis que l'angle BAC est droit.

Du point A, conduisons AD perpendiculaire sur AC; faisons la droite AD égale à la droite AB, et menons la droite DC.

Puisque l'angle CAD est droit, on aura $\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$. Mais $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, et $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$; donc $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2$; donc $DC = BC$. Donc les deux triangles ADC, ABC sont égaux, puisqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Mais l'angle DAC est droit; donc l'angle BAC l'est aussi. Donc, si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, l'angle compris entre ces deux derniers côtés est droit.

83. *Si trois côtés d'un triangle-rectangle sont les côtés homologues de trois figures semblables, la figure construite sur l'hypothénuse est égale à la somme des figures construites sur les deux autres côtés.*

Soit le triangle ABC rectangle en B (*fig.* 45); que les côtés de ce triangle soient les côtés homologues de trois figures semblables; je dis que la figure construite sur l'hypothénuse est égale à la somme des figures construites sur les deux autres côtés.

Puisque les figures semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues (B. 161), nous aurons $CFGB : \overline{BC}^2 :: BHKA : \overline{AB}^2 :: ADEC : \overline{AC}^2$; donc $CFGB + BHKA : \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 :: ADEC : \overline{AC}^2$, mais $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$; donc $ADEC = CFGB + BHKA$. Donc la figure construite sur l'hypothénuse est égale à la somme des figures construites sur les deux autres côtés. Donc, etc.

84. *Les polygones réguliers d'un même nombre des côtés sont entre eux comme les quarrés des diamètres des cercles circonscrits.*

Soient $ABCDE$, $abcde$ (*fig.* 46) deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés; que N soit égal au nombre des côtés de l'un d'eux, N sera égal au nombre des côtés de l'autre. Cela posé, l'angle A sera égal à $\frac{2D(N-2)}{N}$ (B. 86), et l'angle a sera aussi égal à $\frac{2D(N-2)}{N}$; donc l'angle A est égal à l'angle a; donc les autres angles du polygone $ABCDE$ sont égaux aux autres angles du polygone $abcde$. Mais les côtés du polygone $ABCDE$ étant égaux entre eux, et ainsi que les côtés du polygone $abcde$, on a évidemment $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$; donc ces deux polygones sont semblables. Donc le polygone $ABCDE$ est au polygone $abcde$ comme le quarré de AB est au quarré de ab. Menons les rayons FA, FB, fa, fb; les deux triangles ABF, abf seront semblables; en effet, puisque l'angle BAF est égal à la moitié de l'angle BAE, que l'angle baf est égal à la moitié de l'angle bae, et que l'angle BAE,

donc AE est plus grand que EB; donc le triangle ECA est plus grand que le triangle ECB; donc, à plus forte raison, le triangle ECA est plus grand que la surface $BECB$, comprise par les droites BE, EC et par l'arc BC. Le triangle FCA est par la même raison plus grand que la surface $DFCD$ comprise par les droites entre DF, FC, et par l'arc CD; donc le triangle entier AEF est plus grand que la somme des surfaces $BECB$, $DFCD$, dont la première est comprise par les droites BE, EC et par l'arc BC, et dont la seconde est comprise par les droites DF, FC et par l'arc CD; donc le triangle EAF est plus grand que la moitié de la figure $BADCB$, comprise par les droites BA, AD et par l'arc BCD; donc, etc.

88. *Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.*

Soit le cercle $ABCD$ (*fig.* 50), et le triangle EFG rectangle en F; que EF soit égal au rayon, et FG égal à la circonférence; je dis que le triangle EFG est égal au cercle $ABCD$.

Si ce triangle n'est pas égal au cercle à $ABCD$, il est plus grand que ce cercle, ou bien il est plus petit; qu'il soit plus petit que ce cercle, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le quarré $HKLM$; ce quarré sera plus grand que la moitié du cercle, puisque ce quarré est la moitié du quarré circonscrit. Partageons les arcs MH, HK, KL, LM en deux parties égales aux points A, B, C, D, etc., et menons les cordes AH, HB, BK, etc. La somme des triangles MAH, HBK, etc. sera plus grande que la moitié de la somme des segments MAH, HBK, etc. Partageons les arcs restants en deux parties égales; joignons les extrémités de ces arcs, et continuons de faire la même chose jusqu'à ce que la somme des segments restans soit plus petite que l'excès du cercle $ABCD$ sur le triangle EFG, ce qui est toujours possible (84).

Supposons que la somme des segmens restans AH, HB, BK, etc. soit plus petite que cet excès, c'est-à-dire jusqu'à

ce que l'excès du cercle ACD, sur le polygone inscrit, soit plus petit que l'èxcès de ce cercle sur le triangle; il est évident que le polygone inscrit sera plus grand que le triangle EFG.

Du centre N, menons la droite NR perpendiculaire sur AH. Le polygone $AHBKCLDM$ sera égal à un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal à NR, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal au contour de ce polygone; mais NR est plus petit que le côté EF, et le contour du polygone est plus petit que le côté FG; donc le polygone $AHBKCLDM$ est plus petit que le triangle EFG; mais nous avons démontré que ce polygone est au contraire plus grand, ce qui est absurde; donc le triangle EFG n'est pas plus petit que le cercle $ABCD$.

Que le triangle EFG soit plus grand que le cercle $ABCD$, si cela est possible. Circonscrivons un quarré $PQRS$ au cercle $ABCD$. Le quarré inscrit étant la moitié du quarré circonscrit, le cercle $ABCD$ sera plus grand que la moitié du quarré circonscrit; par les points A, B, C, D, milieu des arcs MH, HK, etc., menons les tangentes TV, XY, ZA', $B'C'$. Le triangle TPV sera plus grand que la moitié de la figure $HPMH$ comprise par les droites HP, PM et par l'arc HAM (83). Il en est de même pour les trois triangles restans XQY, ZRA', $B'SC'$. Donç la somme des quatre triangles TPV, XQY, ZRA', $B'SC'$ est plus grande que moitié de la somme des surfaces $MPHM$, $HQKH$, etc. Partageons ensuite les arcs AH, HB, BK, etc., en deux parties égales; par les points de divisions menons des tangentes, et continuons de faire la même chose jusqu'à ce que l'excès du dernier polygone circonscrit sur le cercle $ABCD$ soit plus petit que l'excès du triangle EFG sur le cercle $ABCD$; ce qui est toujours possible (84).

Supposons que l'excès du polygone $TVXY$ etc., sur le cercle $ABCD$ soit plus petit que l'excès du triangle EFG sur le cercle $ABCD$; il est évident que le polygone sera plus petit que le triangle EFG, mais au contraire il est plus grand, puisque le

polygone est égal à un triangle-rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à *EF*, et dont l'autre côté de l'angle droit est plus grand que *FG*, ce qui est absurde. Donc le triangle *EFG* n'est pas plus grand que le cercle *ABCD*. Mais on démontre qu'il n'est pas plus petit; donc il lui est égal. Donc, etc.

89. *Un secteur de cercle est égal à un triangle dont un des côtés de l'angle droit est égal à l'arc compris par les deux rayons de ce secteur, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle.*

Soit le secteur *ACB* (*fig.* 51), et le triangle-rectangle *DEF*, dont le côté *EF* de l'angle droit est égal à l'arc *AB*, et dont l'autre *DE* de l'angle droit est égal au rayon du cercle *ABH*; je dis que le triangle *DEF* est égal au secteur *ACB*.

Prolongeons le côté *EF*, et faisons *EG* égal à la circonférence du cercle *ABH*, et joignons *DG*.

Puisqu'un cercle est à un secteur de ce cercle, comme la circonférence entière est à l'arc compris par les deux rayons de ce secteur (*), le cercle *ABH* est au secteur *ABC*, comme la circonférence de cercle *ABH* est à l'arc *AB*. Mais la circonférence du cercle *ABH* est égale à la droite *EG*, par supposition, et l'arc *AB* égal à la droite *EF*; donc le cercle *ABH* est au secteur *ACB*, comme la droite *EG* est à la droite *EF*. Mais le triangle *DEG* est au triangle *DEF*, comme la droite *EG* est à la droite *EF*. Donc le cercle *ABH* est au secteur *ABC*, comme le triangle *DEG* est au triangle *DEF*; donc en changeant les moyens de place, le cercle *ABH* est au triangle *DEG*, comme le secteur *ACB* est au triangle *DEF*; mais le cercle *ABH* est égal au triangle *DEG*; donc le secteur *ACB* est égal au triangle *DEF*. Donc, etc.

(*) Voyez le lemme suivant.

LEMME.

On a démontré (37) que dans un même cercle les angles au centre sont proportionnels aux arcs. Il suit évidemment de-là que dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les secteurs sont entr'eux comme les arcs de ces secteurs, et que par conséquent un cercle est à un secteur de ce cercle, comme la circonférence de ce même cercle est à l'arc du secteur.

90. *Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.*

Soient les cercles *ABCD*, *abcd* (*fig.* 52), et que leurs diamètres soient *BD*, *bd*; je dis que le cercle *ABCD* est au cercle *abcd* comme le quarré de *BD* est au quarré de *bd*.

Car si cela n'est point, le quarré du diamètre *BD* sera au quarré du diamètre *bd* comme le cercle *ABCD* est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle *abcd*. Supposons d'abord que cette surface soit plus petite, et qu'elle soit *K*. Dans le cercle *abcd*, décrivons le quarré *abcd*; le quarré inscrit sera plus grand que la moitié de ce cercle, parce que le quarré inscrit dans un cercle est la moitié du quarré circonscrit, et qu'un cercle est plus petit que le quarré circonscrit. Partageons les arcs *ab*, *bc*, *cd*, *de*, en deux parties égales aux points *e*, *f*, *g*, *h*, et menons les cordes *ae*, *eb*, *bf*, *fc*, *cg*, *gd*, *dh*, *ha*. Chacun des triangles *aeb*, *bfc*, *dha* est plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; partageons ensuite les arcs restans en deux parties égales; joignons leurs extrémités par des droites, et continuons toujours de faire la même chose, jusqu'à ce qu'il nous reste certains segmens de cercles dont la somme soit moindre que l'excès du cercle *abcd* sur la surface *K*; c'est-à-dire jusqu'à ce que l'excès du cercle *abcd*, sur le polygone inscrit, soit moindre que l'excès du cercle *abcd* sur la surface *K*. Qu'on ait le polygone inscrit, et que ce polygone soit *aebfcgdh*; il est évident que la surface *K*

sera plus petite que le polygone. Décrivons dans le cercle *ABCD* un polygone *AEBFCGDH* semblable au polygone *aebfcgdh*; le quarré de *BD* sera au quarré de *bd* comme le polygone *AEBFCGDH* est au polygone *aebfcgdh*; mais par supposition, le quarré de *BD* est au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est à la surface *K*; donc le cercle *ABCD* est à la surface *K* comme le polygone *AEBFCGDH* est au polygone *aebfcgdh*. Mais le cercle *ABCD* est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; donc la surface *K* est plus grande que le polygone *aebfcgdh*; mais on a démontré qu'elle est plus petite, ce qui est impossible; donc le quarré de *BD* n'est point au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est à une surface quelconque plus petite que le cercle *abcd*. Nous démontrerons semblablement que le quarré de *bd* n'est point au quarré de *BD* comme le cercle *abcd* est à une surface quelconque plus petite que le cercle *ABCD*.

Je dis ensuite que le quarré de *BD* n'est point au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est à une surface quelconque plus grande que le cercle *abcd*. Car si cela est possible, supposons que le quarré de *BD* soit au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est à une surface plus grande, et supposons que *K* soit cette surface. En mettant les antécédens à la place des conséquens, et les conséquens à la place des antécédens, le quarré *bd* sera au quarré de *BD* comme la surface *K* est au cercle *ABCD*; mais la surface *K* est au cercle *ABCD* comme le cercle *abcd* est à une surface quelconque plus petite que le cercle *ABCD*; car le second antécédent étant plus petit que le premier, le second conséquent doit être plus petit que le premier; donc le quarré de *bd* est au quarré de *BD* comme le cercle *abcd* est à une surface plus petite que le cercle *ABCD*, ce qui a été démontré impossible; donc le quarré de *BD* n'est pas au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est à une surface quelconque plus grande que le cercle *abcd*. Mais on a démontré que le quarré de *BD* n'est point au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est à une surface quelconque plus petite que le

cercle *abcd ;* donc le quarré de *BD* est au quarré de *bd* comme le cercle *ABCD* est au cercle *abcd*. Donc les cercles sont entre eux comme les quarrés des diamètres.

87. *Les circonférences de cercles sont entr'elles comme leurs diamètres.*

Soient les cercles *A B C*, *a b c* (*fig.* 53); je dis que les circonférences *ABC*, *a b c* sont entr'elles comme leurs diamètres.

Par le point *A* et *a* menons les tangentes *AE*, *ae*, et que la droite *AE* soit égale à la circonférence *ABC*, et la droite *ae* égale à la circonférence *a e*, et joignons *DE* et *de*. Le triangle *DAE* sera égal au cercle *ABC*, et le triangle *dae* égal au cercle *abc*. Le cercle *ABC* sera donc au cercle *abc* comme le triangle *DAC* est au triangle *dac*, et par conséquent, comme le rectangle sous *DAE* est au rectangle sous *de* (*); mais le cercle *ABC* est au cercle *abc*, comme le quarré de *DA* est au quarré de *da* (89) ; donc le rectangle sous *DAE* est au rectangle sous *dae* comme le quarré de *DA* est au quarré de *da*, ou bien le rectangle sous *DAE* est au quarré de *DA* comme le rectangle sous *dae* est au quarré de *da*. Mais le rectangle sous *DAE* est au quarré de *DA* comme la droite *AE* est à la droite *DA*, et le rectangle sous *dae* est au quarré de *da* comme la droite *ae* est à la droite *da*; donc *AE* : *DA* :: *ae* : *da*, ou bien *AE* : *ae* :: *DA* : *da ;* mais *AE* est égal à la circonférence *ABC*, et *ae* égal à la circonférence *abc ;* donc la circonférence *ABC* est à la circonférence *abc*, comme le rayon *DA* est au rayon *da*; comme le diamètre de la première est au diamètre de la seconde.

88. *La circonférence d'un cercle quelconque égale le triple de son diamètre, plus une partie du diamètre, qui est plus petite que le septième, et plus grande que les dix soixante-onzièmes.*

(*) Le rectangle sous *DAE*, veut dire le rectangle qui a pour base *AE* et pour hauteur *DA*.

Soit le cercle dont AC est le diamètre, et E le centre (*fig.* 56); que la droite CF touche le cercle au point C, et que l'angle FEC soit la troisième partie d'un droit. L'angle FEC étant la troisième partie d'un droit, et par conséquent la douzième partie de quatre droits, il est évident que CF est la moitié du côté de l'exagone régulier, inscrit dans le cercle, dont FE est le rayon; donc FC est la moitié de FE.

Supposons que FE ait 306 parties; FC en aura 153, et $CE = \sqrt{(306)^2 - (153)^2} = \sqrt{70227}$; mais la racine approchée de 70227 est 265; puisque $(265)^2 = 70225$; donc $CE > 265$ (*).

Partageons l'angle FEC en deux parties égales par la droite EG, on aura $FE : CE :: FG : GC$, et par conséquent $FE + CE : CE :: FC : GC$, ou $FE + CE : FC :: CE : GC$; mais $FE = 306$, $CE > 265$, et $FC = 153$; donc $FE + CE : FC > 306 + 265 : 153$, ou $FE + CE : FC > 571 : 153$; donc $CE : GC > 571 : 153$.

Supposons que GC ait 153 parties; on aura $EC > 571$. Mais $GE = \sqrt{\overline{EC}^2 + \overline{GE}^2}$; donc $GE > \sqrt{(571)^2 + (153)^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{326041 + 23409}$, c'est-à-dire $\sqrt{349450}$; mais la racine approchée de 349450 est $591 + \frac{1}{8}$, puisque $(591 + \frac{1}{8})^2 = 349428 + \frac{49}{64}$; donc par une double raison, $GE > 591 + \frac{1}{8}$. Partageons l'angle GEC en deux parties égales par la droite HE; on aura $GE : CE :: GH : HC$, et par conséquent $GE + CE : CE :: GC : HC$, ou bien $GE + CE : GC :: CE : HC$. Mais $GE > 591 + \frac{1}{8}$; $CE > 571$ et $GC = 153$; donc $GE + CE : GC > 591 + \frac{1}{8} + 571 : 153$, ou bien $GE + CE : GC > 1162 + \frac{1}{8} : 153$; donc $CE : HC > 1162 + \frac{1}{8} : 153$.

(*) Au lieu d'écrire : *la raison de A à B est plus grande que la raison de C à D*, on écrit : $A : B > C : D$.

Supposons que *HC* ait 153 parties, on aura $CE < 1162+\frac{1}{8}$; mais $HE=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{HC}^2}$; donc $HE>\sqrt{(1162+\frac{1}{8})^2+(153)^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{1350534+\frac{31}{64}+23409}$, c'est-à-dire $\sqrt{1373943+\frac{33}{64}}$. Mais la racine approchée de $1373943+\frac{33}{64}$ est $1172\frac{1}{8}$; puisque $(1172+\frac{1}{8})^2=1373877+\frac{1}{64}$. Donc, par une double raison, $HE>1172+\frac{1}{8}$. Partageons l'angle *HEC* en deux parties égales, par la droite *KE*; on aura $HC : CE :: HK : KC$, et par conséquent $HE+CE : CE :: HC : KC$, ou $HE+CE : HC :: CE : KC$. Mais $HE > 1172+\frac{1}{8}$, $CE > 1162+\frac{1}{8}$, et $HC=153$; donc $HE+CE : HC > 1172+\frac{1}{8}+1162+\frac{1}{8} : 153$; donc $CE : CK > 2334+\frac{1}{4} : 153$.

Supposons que *CK* ait 153 parties; on aura $CE > 2334+\frac{1}{4}$; mais $KE=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{KC}^2}$; donc $KE>\sqrt{(2334+\frac{1}{4})^2+(153)^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{5448723+\frac{1}{16}+23409}$, c'est-à-dire $\sqrt{5472132+\frac{1}{16}}$. Mais la racine approchée de $5472132+\frac{1}{16}$ est $2339+\frac{1}{4}$, puisque $(2339+\frac{1}{4})^2=5472090+\frac{9}{16}$; donc, par une double raison, $KE>2339+\frac{1}{4}$. Partageons l'angle *KEC* en deux parties égales par la droite *LE*, on aura $KE : CL :: KL : LC$, et par conséquent $KE+CE : CE :: KC : LC$, ou bien $KE+CE : KC :: CE : LC$. Mais $KE>2339+\frac{1}{4}$, $CE>2334+\frac{1}{4}$, et $KC=153$; donc $KE+CE : KC > 2339+\frac{1}{4}+2334+\frac{1}{4} : 153$ ou bien $KE+CE : KC > 4673+\frac{1}{2} : 153$; donc $CE : LC > 4673+\frac{1}{2} : 153$.

Puisque l'angle *FEC* est la douzième partie de quatre angles droits, l'angle *GEC* moitié de *FEC* sera la 24ᵉ partie de quatre droits; l'angle *HEC* moitié de *GEC* sera la 48ᵉ partie de quatre droits; l'angle *KEC* moitié de *HEC* sera la 96ᵉ partie de quatre droits, et enfin l'angle *LEC* moitié de *KEC* sera la 192ᵉ partie de quatre droits.

Faisons l'angle CEM égal à l'angle CEL, et prolongeons EC vers M; l'angle LEM double de l'angle LEC sera la 96me partie de quatre droits, et la droite LM sera le côté d'un polygone régulier de 96 côtés, circonscrit au cercle dont CE est le rayon. Mais nous avons démontré que $EC : CL > 4673 + \frac{1}{2} : 153$; donc $EA : LM > 4673 + \frac{1}{2} : 153$, ou bien $LM : EA < 153 : 4673 + \frac{1}{2}$. Donc $96 \times LM : EA < 153 \times 96 : 4673 + \frac{1}{2}$ ou $96 \times LM : EA < 14688 : 4673 + \frac{1}{2}$. Mais $96 \times LM$ est le contour du polygone de 96 côtés circonscrit au cercle; donc la raison du contour de ce polygone au diamètre du cercle est plus petite que la raison de 14688 à $4673\frac{1}{2}$. Le diamètre étant donc de $4673\frac{1}{2}$ parties et demie, le contour du polygone sera plus petit que 14688. Mais $14688 = 3(4673 + \frac{1}{2}) + 667 +$ et, $\frac{4673 + \frac{1}{2}}{7} = 667 + \frac{9}{14}$; donc $14688 = 3(4673 + \frac{1}{2}) + \frac{4673 + \frac{1}{2}}{7} - \frac{1}{7}$, c'est-à-dire que 14688 égale le triple du diamètre, plus le septième du diamètre moins le septième d'une unité. Mais le contour du polygone est plus petit que 14688; donc, à plus forte raison, le contour du polygone est plus petit que le triple du diamètre augmenté d'un septième de diamètre. Mais la circonférence est plus petite que le contour du polygone. Donc, à plus forte raison, la circonférence est plus petite que le triple du diamètre augmenté d'un septième de ce diamètre.

Soit à présent le cercle dont AC est le diamètre (57); que l'angle BAC soit la troisième partie d'un droit; joignons BC; la droite BC sera égale au rayon. Supposons que AC ait 1560 parties; BC en aura 780. Mais $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}$; donc $AB = \sqrt{\overline{1560}^2 - \overline{780}^2} = \sqrt{1825200}$. Mais la racine approchée en plus de 1825200 est 1351, puisque $\overline{1351}^2 = 1825201$; donc $AB < 1351$.

Partageons l'angle BAC en deux parties égales par la droite AG, et joignons GC; l'angle GAC sera égal à l'angle GCB, puisqu'ils sont égaux chacun à l'angle BAG. Mais l'angle AGC est commun aux deux triangles AGC, CGF; donc ces deux triangles sont équiangles. Donc $AG : GC :: AC : CF$; mais $BF : CF :: AB : AC$; donc $BC : CF :: AB + AC : AC$, ou $AC : CF :: AB + AC : BC$; donc $AG : GC :: AB + AC : BC$. Mais $AB < 1351$, $AC = 1560$, et $BC = 780$; donc $AB + AC : AC < 1351 + 1560 : 780$, c'est-à-dire $AB + AC : AC < 2911 : 780$; donc $AG : GC < 2911 : 780$. Supposons GC de 780 parties, on aura $AG < 2911$. Mais $AC = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{GB}^2}$. Donc $AC < \sqrt{\overline{2911}^2 + \overline{780}^2}$, c'est-à-dire $AC < \sqrt{9082321}$; mais la racine approchée en plus de 908231 est $3012 + \frac{3}{4}$, puisque $(3013 + \frac{3}{8})^2 = 9082689 + \frac{1}{16}$; donc la raison $AC : CG < 3013 + \frac{3}{4} : 780$. Donc si l'on suppose CG de 780 parties, on aura $AC < 3013 + \frac{3}{4}$.

Partageons l'angle CAG en deux parties égales par la droite AH, et joignons HC; les deux triangles CAH, CMH seront équiangles; donc $AH : CH :: AC : CM$; mais $GM : CM :: AG : AC$; donc $CG : CM :: AG + AC : AC$, ou bien $AC : CM :: AG + AC : CG$; donc $AH : CH :: AG + AC : CG$. Mais $AG < 2911$, $AC < 3013 + \frac{3}{4}$, et $CG = 780$; donc $AG + AC : CG < 2911 + 3013 + \frac{3}{4} : 780$, c'est-à-dire $AG + AC : CG < 2924 + \frac{3}{4} : 780$. Donc $AH : CH < 2924 + \frac{3}{4} : 780$. Mais $\frac{2924 + \frac{3}{4}}{13} = 455 + \frac{3}{4}$, et $\frac{780}{13} = 60$; donc $AH : CH < 455 + \frac{3}{4} : 60$, ou bien $AH : CH < 1823 : 240$. Supposons CH de 240 parties, on aura $AH < 1823$; mais $AC = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2}$; donc $AC < \sqrt{\overline{1823}^2 + \overline{240}^2}$, ou $AC < \sqrt{3380929}$; mais la racine approchée en plus de 3380929 est $1838 + \frac{9}{11}$, puisque $(1838 + \frac{9}{11})^2 = 3381252 + \frac{37}{121}$.

Donc $AC : CH < 1838 + \frac{9}{11} : 240$; donc si l'on suppose CH de 240 parties, on aura $AC < 1838 + \frac{9}{11}$.

Partageons l'angle HAC en deux parties par la droite KA ; joignons HC, on aura $AK : KC :: AH + AC : CH$. Mais $AH < 1823$, $AC < 1838 + \frac{9}{11}$, et $CH = 240$; donc $AK : KC < 3661 + \frac{9}{11} : 240$. Mais $\frac{3561 + \frac{9}{11}}{\frac{40}{11}} = 1007$ et $\frac{240}{\frac{40}{11}} = 66$; donc $AK : KC < 1007 : 66$. Supposons KC de 66 parties, on aura $AK < 1007$. Mais $AC = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{KC}^2}$; donc $AC < \sqrt{\overline{1007}^2 + \overline{66}^2}$, c'est-à-dire $CA < \sqrt{1018405}$. Mais la racine approchée en plus de 1018405 est $1009 + \frac{1}{6}$, puisque $(1009 + \frac{1}{6})^2 = 1018417 + \frac{13}{36}$. Donc $AC : CK < 1009 + \frac{1}{6} : 66$. Si donc l'on suppose CK de 66 parties, on aura $AC < 1009 + \frac{1}{6}$.

Partageons enfin l'angle CAK en deux parties égales par la droite LA, et joignons CL ; on aura $AL : LC :: KA + AC : KC$. Mais $AK < 1007$, $AC < 1009 + \frac{1}{6}$, et $KC = 66$; donc $AL : LC < 2016 + \frac{1}{6} : 66$. Supposons LC de 66 parties ; on aura $AL < 2016 + \frac{1}{6}$. Mais $AC = \sqrt{\overline{AL}^3 + \overline{LC}^3}$; donc $AC < \sqrt{(2016 + \frac{1}{6})^2 + (66)^2}$, c'est-à-dire $AC < \sqrt{4069284 + \frac{1}{36}}$. Mais la racine approchée en plus de $4069284 + \frac{1}{36}$ est $2017 + \frac{1}{4}$, puisque $(2017 + \frac{1}{4})^2 = 4069297 + \frac{9}{16}$. Donc $AC : CL < 2017 + \frac{1}{4} : 66$.

Puisque $AC : CL < 2017 + \frac{1}{4} : 60$, on aura $CL : AC > 60 : 2017 + \frac{1}{4}$; et puisque l'arc BC est la sixième partie de la circonférence, l'arc GC en sera la douzième, l'arc HC la vingt-quatrième, l'arc KC la quarante-huitième, et l'arc LC la quatre-vingt-seizième ; donc la droite CL est le côté d'un polygone régulier de quatre-vingt-seize côtés. Mais $CL = 66$; donc le contour du polygone égalera 6337. Donc la raison du contour du polygone au diamètre est plus grande que la raison de 6336 à $2017 + \frac{1}{4}$. Donc si le diamètre est de $2017 + \frac{1}{4}$ de parties, le

contour du polygone sera plus grand que 6336. Puisque $6336 = 3 (2017 + \frac{1}{4}) + 284 + \frac{1}{4}$, que les dix soixante-onzièmes du diamètre égalent $284 + \frac{17}{144}$, et que $284 + \frac{1}{4}$ surpasse $184 + \frac{17}{144}$ de $\frac{17}{284}$; il est évident que 6336 égale le triple du diamètre, plus une partie du diamètre qui est plus grande que ses dix soixante-onzièmes. Mais le contour du polygone est plus grand que 6386, et la circonférence est plus grande que le contour du polygone; donc, par une double raison, la circonférence égalera trois fois le diamètre, plus une partie du diamètre, qui est plus grande que ses dix soixante-onzièmes. Mais on a démontré que la circonférence égale trois fois le diamètre, plus une partie du diamètre qui est plus petite que ses dix soixante-dixièmes, c'est-à-dire son septième; donc la circonférence égale trois fois le diamètre, plus une partie du diamètre; qui est plus petite que son septième et plus grande que ses dix soixante-onzièmes. (L. 150 — 153 — 208.

TROISIÈME PARTIE.

89. *Dans les solides semblables, les triangles qui joignent deux angles solides homologues, et les extrémités de deux arètes homologues dans chaque solide, sont des figures semblables.*

Soient les deux solides semblables *ABCDEFGHK*, *abcdefghk* (*fig.* 58). Que les triangles *AEG*, *aeg* joignent les angles solides homologues *G*, *g*, et les arètes homologues *AE*, *ae*; je dis que les deux triangles *AEG*, *aeg* sont semblables.

Plaçons le solide *abcdefghk* de manière que l'angle solide *c* soit sur l'angle solide *C*, l'arète *cd* sur l'arète *CD*, et l'arète *cg* sur l'arète *CG*; il est évident que la face *cad* s'appliquera sur la face *CAD*, parce que ces faces sont également inclinées sur les faces *cdhg*, *CDHG*. La droite *ca* tombera sur la droite

CD, parce que les angles *acd*, *ACD* sont égaux. Donc l'angle *acg* est égal à l'angle *ACG*. Mais *ac* : *AC* :: *cg* : *CG*; donc les deux triangles *acg*, *ACG* sont semblables. Donc *ac* : *AC* :: *ag* : *AG*; mais *ac* : *AC* :: *ea* : *EA*. Donc *ag* : *AG* :: *ae* : *AE*.

Menons les diagonales *bg*, *BG*. Plaçons le solide *abcdefghk* de manière que l'angle solide *b* soit sur l'angle solide *B*, l'arète *be* sur l'arète *BE*, et l'arète *bf* sur l'arète *BF*. Il est évident que la face *bcgf* s'appliquera sur la face *BCGF*, parce que ces deux faces sont également inclinées sur les faces *bekf*, *BEKF*. La diagonale *bg* s'appliquera sur la diagonale *BG*, parce que les angles *fbg*, *FBG* sont égaux; donc l'angle *gbe* est égal à l'angle *GBE*. Donc *bf* : *BF* :: *bg* : *BG*. Mais *bf* : *BF* :: *be* : *BE*; donc *be* : *BE* :: *bg* : *BG*; donc les deux triangles *bge*, *BGE* sont semblables; donc *be* : *BE* :: *eg* : *EG*. Mais *be* : *BE* :: *ae* : *AE*; donc *eg* : *EG* :: *ae* : *AE*. Mais on a démontré que *ag* : *AG* :: *ae* : *AE*; donc *ae* : *AE* :: *ag* : *AG* :: *eg* : *EG*. Donc les deux triangles *aeg*, *AEG* sont semblables. Donc dans des solides semblables, les angles qui joignent des angles homologues et des arètes homologues, sont des figures semblables.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que des diagonales qui joignent des angles solides homologues, sont entre elles comme les arêtes homologues.

90. *Si de deux solides homologues on abaisse des perpendiculaires sur des faces homologues, ces perpendiculaires seront entre elles comme les arètes homologues.*

Soient les deux solides homologues *abcdefghk*, *ABCDEFGHK* (*fig.* 58). Des angles solides homologues *a*, *A*, abaissons les perpendiculaires *al*, *AL* sur les faces homologues *fghk*, *FGHK*; je dis que ces perpendiculaires sont entre elles comme les arètes homologues.

Joignons les points l, L avec les angles solides homologues g, G. Plaçons le solide $abcdefghk$ de manière que l'angle solide c soit sur l'angle solide homologue C, l'arète cd sur l'arète homologue CD, et l'arète cg sur l'arète homologue CG. Il est évident que les arètes ca, cb tomberont sur les arètes CA, CB, et que la face $fghk$ sera parallèle à la face homologue $FGHK$. Donc la perpendiculaire al sera parallèle à la perpendiculaire AL, parce que ces deux droites seront perpendiculaires sur des plans parallèles. Mais la droite ag est parallèle à la droite AG, parce que les triangles acg, ACG sont semblables. Donc l'angle gal est égal à l'angle GAL. Mais l'angle alg est droit, ainsi que l'angle ALG; donc les deux triangles alg, ALG sont semblables. Donc $al : AL :: ag : AG$. Mais $ag : AG :: ac : AC$. Donc $al : AL :: ac : AC$. Donc les perpendiculaires menées de deux angles homologues dans deux solides semblables, sont entre elles comme les arètes homologues de ces solides.

91. *Si deux angles solides sont compris chacun par trois angles plans, et si les angles plans du premier sont égaux aux angles plan du second, chacun à chacun, les plans des angles égaux seront également inclinés les uns sur les autres dans les deux solides.*

Soient les angles solides A et A' (*fig.* 59); que l'angle solide A soit compris par les trois angles plans BAC, CAD, DAB; que l'angle solide A soit compris par les trois angles plans $B'A'C'$, $C'A'D'$, $D'A'B'$; que l'angle BAC soit égal à l'angle $B'A'C'$, l'angle CAD égal à l'angle $C'A'D'$, et l'angle DAB égal à l'angle $D'A'B'$; je dis que les plans des angles égaux sont également inclinés les uns sur les autres dans les deux angles solides.

D'un point quelconque B de la droite AB, menons dans le plan BAD la droite BD perpendiculaire sur la droite AB; du même point B, menons dans le plan BAC la droite BC perpendiculaire sur la droite AB; joignons les points C, D; fai-

sous la droite $A'B'$ égale à la droite AB, et du point B', menons dans le plan $A'B'D'$ la droite $B'D'$ perpendiculaire sur la droite $A'B'$, et dans le plan $B'A'C'$ la droite $B'C'$ perpendiculaire sur la droite $A'B'$; joignons les points C', D'. La droite AB étant égale à la droite $A'B'$, l'angle BAD égal à l'angle $B'A'D'$, et l'angle ABD étant droit ainsi que l'angle $A'B'D'$, les triangles ABD, $A'B'D'$ seront égaux et semblables; donc la droite BD est égale à la droite $B'D'$, et la droite AD égale à la droite $A'D'$. La droite BC est égale à la droite $B'C'$, et la droite AC égale à la droite $A'C'$, par la même raison. Mais l'angle CAD est égal à l'angle $C'A'D'$, la droite AC égale à la droite $A'C'$, et la droite AD égale à la droite $A'D'$; donc le triangle CAD est égal et semblable au triangle $C'A'D'$; donc les deux triangles BCD, $B'C'D'$ ont leurs côtés égaux chacun à chacun; donc ces deux triangles ont aussi leurs angles égaux chacun à chacun. Donc l'angle CBD est égal à l'angle $C'B'D'$; donc l'inclinaison du plan CBA sur le plan DBA est égale à l'inclinaison du plan $C'B'A'$ sur le plan $D'B'A'$ (B. 191).

On démontrera, de la même manière, que les plans des autres angles égaux sont également inclinés les uns sur les autres dans ces angles solides; donc, etc.

92. *Si deux angles solides sont compris chacun par trois angles plans, et si les angles plans du premier sont égaux aux angles plans du second, chacun à chacun, ces angles solides seront égaux entre eux.*

Soient les angles solides A, A' (*fig.* 59); que les angles plans BAC, CAD, DAB de l'angle solide A soient égaux aux angles plans $B'A'C'$, $C'A'D'$, $D'A'B'$ de l'angle solide A', chacun à chacun; je dis que l'angle solide A sera égal à l'angle solide A'.

Appliquons exactement l'angle BAD sur son égal $B'A'D'$; il peut arriver que les autres angles plans qui sont égaux dans les deux angles solides A, A' soient placés des mêmes côtés ou ne soient pas placés des mêmes côtés. Supposons d'abord que l'an-

gle BAD étant appliqué exactement sur son égal $B'A'D'$, les autres angles plans qui sont égaux dans les deux angles solides A, A' soient placés des mêmes côtés. Puisque l'inclinaison du plan de l'angle BAC sur le plan de l'angle BAD est égale à l'inclinaison du plan de l'angle $B'A'C'$ sur le plan de l'angle $B'A'D'$ (91), le plan de l'angle BAC s'appliquera sur le plan de l'angle $B'A'C'$. Mais l'angle BAC est égal à l'angle $B'A'C'$; donc la droite AC s'applique sur la droite $A'C'$, Mais la droite AD est appliquée sur la droite $A'D'$, et la droite AC sur la droite $A'C'$; donc l'angle plan DAC s'applique exactement sur l'angle plan $D'A'C'$. Donc les trois angles plans de l'angle solide A s'appliquent exactement sur les trois angles plans de l'angle solide A'; donc les angles solides A, A' sont égaux.

Supposons, en second lieu, que les angles plans BAD, dab; qui sont égaux entre eux, soient appliqués exactement l'un sur l'autre, la droite AB sur la droite ad, et la droite AD sur la droite ab, et que les autres angles plans qui sont égaux entre eux ne soient pas placés de même côté; il est évident, dans cette supposition, que le plan BAC ne s'appliquera point sur le plan dac, parce que l'inclinaison du plan BAC sur le plan BAD n'est pas égale à l'inclinaison du plan dac sur le plan dab. Le plan DAC ne s'appliquera point sur le plan bac, par la même raison. Donc les angles plans BAD, dab étant appliqués exactement l'un sur l'autre, la droite AB sur la droite ad, et la droite AD sur la droite ab, les autres angles plans qui sont égaux dans ces denx angles solides ne s'appliqueront pas les uns sur les autres.

Si l'on plaçoit l'angle plan BAD sur l'angle plan bad, de manière que le point A tombât sur le point a, que la droite AB s'appliquât sur la droite ab, il est évident que la droite AD s'appliqueroit sur la droite ad; mais alors le plan de l'angle BAC auroit la position bac', et le plan de l'angle CAD auroit la position $c'ad$; de sorte que l'angle solide A seroit placé au-dessous du plan abd. D'où je conclus que le principe de super-

position ne peut pas être employé pour démontrer l'égalité de deux angles solides qui sont compris chacun par trois angles plans, et dont les angles plans du premier sont égaux aux angles plans du second, chacun à chacun, lorsqu'ayant appliqué l'un sur l'autre deux angles égaux, les autres angles égaux ne sont pas placés des mêmes côtés (*); dans ce cas, l'on doit se contenter de dire, que deux angles solides, qui sont compris chacun par trois angles plans et dont les angles plans du premier sont égaux aux angles plans du second, sont égaux entre eux, parce que leurs parties constituantes, leurs angles plans et leurs inclinaisons sont égales de part et d'autre; donc, etc.

93. *Les solides dont les angles solides ne sont pas compris par plus de trois angles plans, et qui sont contenus sous le même nombre de faces égales et semblables, semblablement placées, sont égaux et semblables.*

Soient les deux solides $ABCDF$, $A'B'C'D'F'$ (*fig.* 60); que leurs angles solides ne soient pas compris par plus de trois angles plans, et que ces deux solides soient contenus dans le même nombre de faces égales et semblables et semblablement placées; je dis que ces deux solides sont égaux et semblables.

Que la face ABC du premier solide soit appliquée exactement sur la surface homologue $A'B'C'$ du second.

Puisque l'inclinaison du plan AF sur le plan ABC est égale à l'inclinaison du plan $A'F'$ sur le plan $A'B'C'$ (91), la face AF s'appliquera exactement sur la face $A'F'$, qui lui est égale et semblable. Les autres faces du solide $ABCDEF$ s'appliqueront exactement sur les autres faces du solide $A'B'C'D'E'F'$, par la même raison; donc ces deux solides seront égaux. Mais les faces homologues sont également inclinées les unes sur les autres dans ces deux solides; donc les deux solides $ABCDEF$,

(*) Les angles solides égaux, dont les angles plans ne peuvent point être superposés les uns sur les autres, s'appellent angles solides symétriques.

A'B'C'D'E'F', qui sont contenus dans le même nombre de faces égales et semblables, sont égaux et semblables entre eux.

94. *Les parallélépipèdes droits qui ont des bases égales et semblables, sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Que les parallélépipèdes droits *AB*, *AC* (*fig.* 61), ayent la même base *AE*; je dis que le parallélépipède *AB* est au parallélépipède *AC*; comme *AD*, hauteur du premier, est à *AH*, hauteur du second.

Supposons d'abord que les hauteurs *AD*, *AH* sont commensurables, et que la droite *M*, leur commune mesure, est contenue douze fois dans *AD*, et sept fois dans *AH*. Par les points de division, conduisons des plans parallèles à la base *AE*; ces plans partageront le parallélépipède *AB* en douze parallélépipèdes égaux entre eux (93), et le parallélépipède *AC* contiendra sept de ces parallélépipèdes. Le parallélépipède *AB* sera donc au parallélépipède *AC*, comme 12 est à 7, ou comme $12 \times M : 7 \times M$, c'est-à-dire, comme *AD* est à *AH*. Le raisonnement serait le même, si le rapport des hauteurs était représenté par d'autres nombres. Donc les parallélépipèdes droits qui ont des bases égales et semblables, sont entre eux comme leurs hauteurs, lorsque leurs hauteurs sont commensurables.

Supposons à présent que les hauteurs ne soient point commensurables; je dis que le parallélépipède *AD* sera encore au parallélépipède *AC*, comme *AC*, hauteur du premier, est à *AH*, hauteur du second.

Car si cela n'est point, le quatrième sera trop petit ou trop grand. Qu'il soit trop petit, et que l'on ait $AB : AC :: AD : AF$. Partageons la droite *AD* en parties égales, mais assez petites pour qu'il y ait un point de division *G* entre les points *F*, *H*; et par les points *G*, conduisons un plan *GK* parallèle à la base *AE*. Les hauteurs *AD*, *AG* des parallélépipèdes *AB*, *AK* étant commensurables, on aura $AB : AK :: AD : AG$.

Mais on a, par supposition, $AB : AC :: AD : AF$, on aura donc, en changeant les moyens de place,

$$AB : AD :: AK : AG.$$
$$AB : AD :: AC : AF.$$

Donc,

$$AK : AG :: AC : AF.$$

Mais AK est plus grand que AC, tandis que AG est plus petit que AF; donc ces quatre quantités ne forment pas une proportion; donc le parallélépipède AB n'est pas au parallélépipède AC, comme la droite AD est à une droite plus grande que la droite AH.

On démontreroit, d'une manière semblable, que AB n'est pas à AC, comme AD est à une droite plus petite que AH. Donc $AB : AC :: AD : AH$. Donc les parallélépipèdes qui ont des bases égales et semblables, sont entre eux comme leurs hauteurs, lors même que les hauteurs sont incommensurables. Donc, etc.

95. *Si un parallélépipède est coupé par un plan selon les diagonales de deux plans opposés, ce parallélépipède sera coupé en deux parties égales par ce plan.*

Soit d'abord le parallélépipède droit AG (*fig.* 62); que ce parallélépipède soit coupé par un plan conduit par les diagonales AC, EG; que la face AF soit appliquée exactement sur la face DG, le côté AE étant placé sur le côté CG. Puisque l'inclinaison de la face BG sur la face BE est égale à l'inclinaison de la face DE sur la face DG, la face BG s'appliquera exactement sur la face DE qui lui est égale et semblable; le triangle EFG sera appliqué exactement sur le triangle GHE, ainsi que le triangle ABC sur le triangle GDA, et la face AG sera commune; donc les faces du prisme $ABCEFG$ s'appliquent exactement sur les faces du prisme $ACDEGH$; donc ces deux prismes sont égaux.

Soit à présent le parallélépipède oblique ag; par un point E

du côté *ae*, conduisons le plan *EFGH* perpendiculaire sur *ab*; prolongeons *ea*, *fb*, *gc*, *hd*; faisons *EA* égal à *ae*, et par le point *A* conduisons le plan *ABCD* parallèle au plan *EFGH*; je dis que le solide *ABCDabcd* sera égal et semblable au solide *EFGH efgh*.

En effet, la face *ABCD* est égale et semblable à la face *EFGH*, et la face *abcd* est aussi égale à *efgh*; la face *Ab* est égale et semblable à la face *Ff*; car puisque *EA* est égal à *ae*, la droite *aA* est égale à *eE*; mais la droite *AB* est égale et parallèle à *EF*, et la droite *ab* est égale et parallèle à *ef*; donc les deux faces *Ab*, *Ef* peuvent s'appliquer exactement l'une sur l'autre; donc elles sont égales et semblables; donc la droite *Bb* est égale à *Ff*.

On démontrera de la même manière que les faces *Bc*, *Cd*, *Da* sont égales et semblables aux faces *Fg*, *Gh*, *He*; donc les deux solides *ABCDabcd*, *EFGHefgh* sont égaux et semblables (93); ajoutons de part et d'autre le solide *abcd EFGH*; il est évident que le parallélépipède *AG* sera égal au parallélépipède *ag*. Mais le solide *EFGefg* est égal au solide *ABCabc*; donc si nous ajoutons de part et d'autre le solide *abcEFG* le prisme triangulaire *abcefg* sera égal au prisme triangulaire *ABCEFG*; le prisme triangulaire *adcehg* sera égal au prisme triangulaire *ADCEHG* par la même raison. Mais le prisme *ABCEFG* est égal au prisme *ADCEHG*; donc les deux prismes *abcefg*, *adcehg* sont égaux; donc, etc.

96. *Deux parallélépipèdes sont égaux lorsqu'ils ont la même base et la même hauteur, et lorsque les arètes sont placées dans les mêmes droites.*

Que les parallélépipèdes *CM*, *CN* (*fig.* 63) ayent la même base *AB* et la même hauteur, et que les arètes *AF*, *AG*, *LM*, *LN*, *CD*, *CE*, *BH*, *BK* soient dans les mêmes droites *FN*, *DK*; je dis que le parallélépipède *CM* est égal au parallélépipède *CN*.

Car puisque chacune des figures *CBHD*, *CBKE* est un pa-

rallélogramme, la droite *CB* sera égale à chacune des droites *DH*, *EK* (54); donc la droite *DH* sera égale à la droite *EK*. Retranchons la partie commune *EH*, la droite restante *DE* sera égale à la droite restante *HK* : donc le triangle *DEC* est égal au triangle *HKB* (B. 83), et le parallélogramme *DG* égal au parallélogramme *HN*. Par la même raison, le triangle *AFG* est égal au triangle *LMN*. Mais la parallélogramme *CF* est égal au parallélogramme *BN*, car ces parallélogrammes sont opposés; donc le prisme contenu sous les deux triangles *AFG*, *DEC*, et les trois parallélogrammes *AD*, *DG*, *GC*, est égal au prisme contenu sous les deux triangles *LMN*, *HBK*, et les trois parallélogrammes *BM*, *NH*, *BN* (93) : donc si nous ajoutons à chacun de ces prismes le solide dont une des bases est le parallélogramme *AB* et dont l'autre base est le parallélogramme *GEHM*, le parallélépipède *CM* sera égal au parallélépipède *CN*; donc, etc.

Si le point *G* tomboit sur le point *M* ou au-delà, on démontreroit, d'une manière semblable, que les parallélépipèdes *CM*, *CN* sont égaux entre eux.

97. *Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les arètes ne sont point placées dans les mêmes droites, sont égaux entre eux.*

Soient *CM*, *CN* (*fig.* 64) deux parallélépipèdes qui ayent la même base *AB* et la même hauteur, et dont les arètes *AF*, *AG*, *LM*, *LN*, *CD*, *CE*, *BH*, *BK* ne soient point placées dans les mêmes droites; je dis que le parallélépipède *CM* est égal au parallélépipède *CN*.

Prolongeons les droites *NK*, *DH*, *GE*, *FM*, et que ces droites se rencontrent aux points *P*, *R*, *Q*, *O*. Menons *AO*, *LP*, *CQ*, *BR*. Le parallélépipède *CM*, dont la base est le parallélogramme *ACBL* opposé au parallélogramme *FDHM*, sera égal au parallélépipède *CP* dont la base est le parallélogramme *ABCL* opposé au parallélogramme *OQRP* (96), parce que ces deux parallélogrammes ont la même base et la même

hauteur, et que leurs arêtes *AF*, *AO*, *LM*, *LP*, *CD*, *CQ*, *BH*, *BR* sont dans les mêmes droites *FP*, *DR*. Mais le parallélépipède *CP* dont la base est le parallélogramme *ACBL* opposé au parallélogramme *OQRP*, est égal au parallélipipède *CN* dont la base est le parallélogramme *ACBL* opposé au parallélogramme *GEKN* (96), parce que ces deux parallélipipèdes ont la même base et la même hauteur, et que leurs arètes *AG*, *AO*, *CE*, *CQ*, *LN*, *LP*, *BK*, *BR* sont dans les mêmes droites *GQ*, *NR*; donc le parallélipipède *CM* est égal au parallélipipède *CN*; donc, etc.

97. *Les parallélipipèdes qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont égaux entre eux.*

Que les parallélipipèdes *BG*, *CF* (*fig.* 65) ayent leurs bases égales et leurs hauteurs égales, je dis que le parallélipipède *BG* est égal au parallélipipède *CF*.

Supposons d'abord que ces parallélipipèdes soient droits, et que l'angle *BLA* ne soit pas égal à l'angle *CPD*. Conduisons la droite *RT* dans la direction de la droite *CR*, et faisons sur la droite *RT*, et au point *R* pris dans cette droite, l'angle *TRV* égal à l'angle *ALB*; faisons la droite *RT* égale à la droite *LA* et la droite *RV* égale à la droite *LB*; par les points *V*, *T*, menons les droites *VY*, *TY* parallèles aux droites *RT*, *RV*, et achevons le parallélipipède *YS*. Puisque les deux droites *TR*, *RV* sont égales aux droites *AL*, *LB*, et qu'elles comprennent des angles égaux, le parallélogramme *RY* sera égal et semblable au parallélogramme *LH*. De plus, puisque *RT* est égal à *LA* et *RS* égal à *LM*, et que ces droites comprennent des angles égaux, le parallélogramme *RZ* sera égal et semblable au parallélogramme *LG*. Le parallélogramme *SV* sera égal et semblable au parallélogramme *MB*, par la même raison; donc le parallélipipède *BG* sera égal au parallélipipède *VZ* (93). Prolongeons *DR*, *YV*, et que ces droites se rencontrent au point *A'*; par le point *T*, conduisons la droite *TT'* parallèle à la droite *DA'*; prolongeons *TT'*, *PD*

jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point B', et complétons le parallélipipède $A'Z$. Le parallélipipède ZA' qui a pour base le parallélogramme RZ opposé au parallélogramme $A'Q'$, est égal au parallélipipède ZV qui a pour base le parallélogramme RZ opposé au parallélogramme VX, parce que ces parallélipipèdes ont la même base et la même hauteur; mais le parallélipipède ZV est égal au parallélipipède BG; donc le parallélipipède BG est égal au parallélipipède ZA'. Mais le parallélogramme VT est égal au parallélogramme $A'T$; car ces deux parallélogrammes ont la même base RT et sont compris entre les mêmes parallèles RT, $A'Y$, et le parallélogramme VT est égal au parallélogramme CD, parce que le parallélogramme CD est égal au parallélogramme BA; donc le parallélogramme $A'T$ est égal au parallélogramme CD. Donc la base CD est à la base DT comme la base $A'T$ est à la base DT; et puisque les parallélipipèdes droits CF, RI ont des bases CQ, RF égales et semblables, on aura $CR : RT :: CF : RI$ (94); mais $CR : RT :: CD : DT$ (70); donc $CD : DT :: CF : RI$. Par la même raison $A'T : DT :: A'Z : RI$. Mais la base CD est à la base DT, comme la base $A'T$ est à la base DT, donc le parallélipipède CF est au parallélipipède RI comme le parallélipipède $A'Z$ est au parallélipipède RI; donc puisque le second terme est égal au quatrième, le premier sera égal au troisième; donc le parallélipipède CF est égal au parallélipipède $A'Z$. Mais on a démontré que le parallélipipède $A'Z$ est égal au parallélipipède BG; donc le parallélipipède BG est égal au parallélipipède CF.

Supposons à présent que les parallélipipèdes BG, CF soient obliques (*fig.* 66); je dis encore que le parallélipipède BG sera égal au parallélipipède CF.

Des points E, K, G, M, O, S, F, Q, conduisons sur les plans BA, CD les perpendiculaires EV, KN, GT, MX, OA', SI, FZ, QY, qui rencontrent ces plans aux points V, N, T, X, A', I, Z, Y, et menons les droites VN, NT,

TX, *XV*, *A'I*, *IZ*, *ZY*, *YA'*. Le parallélipipède *VG* sera égal au parallélipipède *A'F*, parce que ces parallélipipèdes sont droits et qu'ils ont des bases égales. Mais le parallélipipède *VG* est égal au parallélipipède *BG* (97), et le parallélipipède *A'F* est égal au parallélipipède *CF*, puisqu'ils ont la même base et la même hauteur ; donc le parallélipipède *BG* est égal au parallélipipède *CF*.

Donc les parallélipipèdes, qui ont des bases égales et la même hauteur, sont égaux entre eux.

98. *Les parallélipipèdes d'égale hauteur, sont entre eux comme leurs bases.*

Soient *AB*, *CD* (*fig*. 67) deux parallélipipèdes d'égale hauteur ; je dis que ces parallélipipèdes sont entre eux comme leurs bases, c'est-à-dire que le parallélipipède *AB* est au parallélipipède *CD*, comme la base *AE* est à la base *CF*.

Prolongeons la droite *LF* vers *M*, et sur *FG*, et dans l'angle *GFM* construisons un parallélogramme *FH*, qui soit égal au parallélogramme *GM* (*Lemme suivant*), et sur la base *GM* construisons le parallélipipède *GK*, dont la hauteur soit égale à celle du parallélipipède *CD*. Le parallélipipède *GK* sera égal au parallélipipède *AB* (97), car ces parallélipipèdes ont des bases égales *AE*, *FH*, et des hauteurs égales. Mais les parallélipipèdes *CD*, *GK* ont des bases *CO*, *GD* égales et semblables ; donc le parallélipipède *GK* est au parallélipipède *CD* comme *GH* est à *CG*, et comme *GM* est à *CF* (94) ; mais la base *GM* est égale à la base *AE*, et le parallélipipède *GK* égal au parallélipipède *AB* ; donc le parallélipipède *AB* est au parallélipipède *CD* comme la base *AE* est à la base *CF* ; donc, etc.

LEMME.

Pour construire sur la droite *GF* et dans l'angle *GFM* un parallélogramme qui soit égal au parallélogramme *AE*, cherchons une quatrième proportionnelle aux bases *GF*, *AN* des

parallélogrammes GM, AE, et à la hauteur du parallélogramme AE, et sur GF et dans l'angle GFM construisons un parallélogramme GM qui ait pour hauteur cette quatrième proportionnelle. Les deux parallélogrammes GM, AE seront égaux entre eux, puisqu'ils sont égaux à des rectangles égaux (73).

99. *Les bases des parallélipipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, et les parallélipipèdes dont les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs sont égaux entre eux.*

Que les parallélipipèdes AB, CD (*fig.* 68) soient égaux; je dis que leurs bases sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, c'est-à-dire que la base EH est à la base NQ comme la hauteur du parallélipipède CD est à la hauteur du parallélipipède AB.

Supposons d'abord que ces parallélipipèdes soient droits. Si la base EH est égale à la base NQ, et le parallélipipède AB égal au parallélipipède CD, la hauteur CM sera égale à la hauteur AG; car si les bases EH, NQ étant égales, les hauteurs AG, CM n'étoient pas égales, le parallélipipède AB ne seroit point égal au parallélipipède CD; mais ces deux parallélipipèdes sont supposés égaux; donc les hauteurs CM, AG ne sont pas inégales: donc elles sont égales; donc la base EH est à la base NQ comme CM est à AG.

Supposons à présent que la base EH ne soit pas égale à la base NQ, et que la base EH soit la plus grande; puisque le parallélipipède AB est égal au parallélipède CD, la hauteur CM sera plus grande que la hauteur AG; car si cela n'étoit point, les parallélipipèdes AB, CD ne seroient pas égaux. Faisons CT égal à AG et sur la base NQ construisons le parallélipipède PT. Puisque le parallélipipède AB est égal au parallélipipède CD; on aura $AB : CX :: CD : CX$; mais $AB : CX :: EH : NQ$ (98), car les parallélipipèdes AB, CX sont égaux en hauteur, et $CD : CX :: CM : CT$ (94); donc $EH : NQ :: CM : CT$; mais CT est égal à AG; donc $EH : NQ :: MC : AG$;

donc les bases des parallélipipèdes *AB*, *CD* sont réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs.

Supposons ensuite que les bases des parallélipipèdes *AB*, *CD* soient réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, c'est-à-dire que la base *EH* soit à la base *NQ* comme la hauteur du parallélipipède *CD* est à la hauteur du parallélipipède *AB*; je dis que les parallélipipèdes *AB*, *CD* sont égaux entre eux.

Si *EH* égale *NQ*, et si $EH : NQ :: CD : AB$, la hauteur du parallélipipède *CD* sera égale à la hauteur du parallélipipède *AB*. Mais les parallélipipèdes qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égaux entre eux (97); donc le parallélipipède *AB* sera égal au parallélipidède *CD*.

Mais supposons que la base *EH* ne soit point égale à la base *NQ*, et que *EH* soit la plus grande base; la hauteur du parallélipipède *CD* sera plus grande que la hauteur du parallélipipède *AB*, c'est-à-dire que *CM* sera plus grand que *AG*; faisons *CT* égal à *AG*, achevons le parallélipipède *PT*. Puisque $EH : NQ :: CM : AG$ et que $AG = CT$, on aura $EH : NQ :: CM : CT$. Mais $EH : NQ :: AB : CX$ (98), car les parallélipipèdes *AB*, *CX* ont des hauteurs égales, et $CM : CT :: CD : CX$ (94); donc $AB : CX :: CD : CX$; donc le parallélipipède *AB* est égal au parallélipipède *CD*.

A présent, que les parallélipipèdes soient obliques; sur leurs bases construisons des parallélipipèdes droits qui aient les mêmes hauteurs qu'eux. Puisque ces parallélipipèdes droits seront égaux aux parallélipipèdes obliques, on conclura que les parallélipipèdes obliques et égaux ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, et que les parallélipipèdes obliques qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, sont égaux. Donc, etc.

COROLLAIRE.

Si les parallélipipèdes obliques étoient équiangles, leurs hauteurs seront proportionnelles aux arètes latérales; et l'on concluroit que les parallélipipèdes obliques et égaux ont leurs bases

réciproquement proportionnelles aux arètes latérales, et que les parallélipipèdes obliques et équiangles, qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à ces mêmes arètes, sont égaux.

100. *Si trois droites sont proportionnelles, le parallélipipède rectangle construit avec ces trois droites, est égal au cube construit avec la droite moyenne.*

Soient les trois droites A, B, C de manière que A soit à B comme B est à C; je dis que le parallélipipède rectangle, dont la base est le rectangle sous A, B et la hauteur B, est égal au cube de la droite B.

En effet, puisque $A : B :: B : C$, le rectangle sous A, C est égal au quarré de B (74). Donc le parallélipipède rectangle dont la base est le rectangle sous A, C et la hauteur B est égal au cube de B, puisque ce sont deux parallélipipèdes qui ont des bases égales et des hauteurs égales (97). Donc, etc.

101. *Si quatre droites forment une progression géométrique, le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième.*

Soient les quatre droites A, B, C, D de manière que $A : B :: B : C :: C : D$; je dis que $A^3 : B^3 :: A : D$ (*).

En effet, puisque $A : B :: B : C$, on aura $B^3 = A \times B \times C$ (100), mais $A : B :: C : D$; donc $B \times C = A \times D$ (73); donc $A \times B \times C = A \times A \times D$ (97). Mais $A^3 : B^3 :: A^3 : B^3$; donc $A^3 : B^3 :: A \times A \times A : A \times A \times D$; donc $A^3 : B^3 :: A : D$ (94). Donc, etc.

102. *Les parallélipipèdes semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.*

Soient les deux parallélipipèdes semblables AD, ad; que

(*) Au lieu d'écrire : *le cube de A*, on écrit : A^3.

Au lieu d'écrire : *le parallélipipède rectangle construit avec les droites* A, B, C, on écrit : $A \times B \times C$.

$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd$ (*fig.* 69) ; je dis que AD est à ad comme le cube de AB est au cube de ab.

Supposons d'abord que ces parallélipipèdes soient rectangles ; prolongeons AB vers G ; faisons BE égal à ab, que $AB : BE :: BE : EF :: EF : FG$ et sur les droites BE, EF, FG construisons les parallélipipèdes BM, EN, FO ; je dis d'abord que le parallélipipède FO est égal au parallélipipède ad.

Que $BD : bd :: ab : P$; le parallélipipède $BD \times P$ sera égal au parallélipipède $bd \times ab$ (99).

En effet, puisque $BD : bd :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, et que $BD : bd :: ab : P$, on aura $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: ab : P$, ou bien $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: BE : P$; mais $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: \overline{BE}^2 : \overline{EF}^2$ (79), et $\overline{BE}^2 : \overline{EF}^2 :: BE : FG$ (79) ; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: BE : FG$; mais $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: BE : P$; donc $BE : FG :: BE : P$. Donc $FG = P$; donc les parallélipipèdes $GO \times FG$, $BD \times P$ sont égaux ; mais $BD \times P = bd \times ab$; donc $FO = ad$.

Cela posé, puisque $AD : FO :: AC : FL$, que $AC : FL :: AB : FG$, on aura $AD : FO :: AB : FG$. Mais $\overline{AB}^3 : \overline{BE}^3 :: AB : FG$ (101) ; donc $AD : FO :: \overline{AB}^3 : \overline{BE}^3$. Mais $FO = ad$ et $BE = ab$; donc $AD : ad :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$.

Supposons, en second lieu, deux parallélipipèdes semblables quelconques AD, ad. Sur AB, ab, construisons deux rectangles qui ayent les mêmes hauteurs que les parallélogrammes AC, ac, et sur ces rectangles construisons deux parallélipipèdes rectangles qui ayent les mêmes hauteurs que les parallélipipèdes AD, ad. Ces parallélipipèdes rectangles seront égaux aux parallélipipèdes AD, ad (97), et semblables entre eux ; donc ces parallélipipèdes seront entre eux comme les cubes des côtés AB, ab ; donc les parallélipipèdes AD, ad sont entre eux

comme les cubes des côtés AD, ad, et par conséquent comme les cubes de leurs autres côtés homologues; donc, etc.

103. *Si l'on a les trois proportions suivantes :* AB : EF :: KL : OP, BC : FG :: LM : PQ, *et* CD : GH :: MN : QR (fig. 70) *le parallélipipède rectangle, sous les trois premiers antécédens, sera au parallélipipède rectangle sous les trois premiers conséquens, comme le parallélipipède rectangle, sous les trois seconds conséquens, est au parallélipipède rectangle sous les trois derniers conséquens.*

Cherchons une quatrième proportionnelle cS aux grandeurs AC, EG, GH, et sur ac égal à AC, construisons un parallélipipède rectangle dont la hauteur soit cS; on aura $aS = EH$ (99); cherchons ensuite une quatrième proportionnelle mT aux grandeurs KM, OQ, QR, et sur km égal à KM, construisons un parallélipipède rectangle kT dont la hauteur soit mT, on aura $kT = OR$.

Puisque $AC : EG :: KM : OQ$ (78), que $AC : EG :: GH : cS$, et que $KM : OQ :: QR : mT$, on aura $GH : cS :: QR : mT$. Mais $CD : GH :: MN : QR$; donc $CD : cS :: MN : mT$ (77). Mais $CD : cS :: AD : aS$ (94), et $MN : mT :: KN : kT$; donc $AD : aS :: KN : kT$. Mais $aS = EH$, et $kT = OR$; donc $AD : EH :: KN : OR$; donc, etc.

Il suit évidemment de-là que si quatre droites sont proportionnelles, les cubes de ces droites sont encore proportionnels; il suit encore de-là que si les cubes de quatre droites sont proportionnels, ces mêmes droites sont encore proportionnelles.

En effet, que $a^3 : b^3 :: c^3 : d^3$; si les quatre droites a, b, c, d ne forment pas une proportion, on aura $a : b :: c : e$; donc $a^3 : b^3 :: c^3 : e^3$; donc $c^3 : d^3 :: c^3 : e^3$; donc $d^3 = e^3$; donc $d = e$; mais $a : b :: c : e$; donc $a : b :: c : d$.

104. *Si quatre droites sont proportionnelles, les parallélipipèdes semblables et semblablement construits sur ces droites sont proportionnels, et si des parallélipipèdes semblables et*

semblablement construits sur quatre droites sont proportionnels, ces droites sont proportionnelles entr'elles.

Soient quatre droites proportionnelles *AB*, *CD*, *EF*, *GH* (*fig.* 71), de manière que *AB* soit à *CD* comme *EF* est à *GH*; construisons sur les quatre droites *AB*, *CD*, *EF*, *GH* les parallélipipèdes semblables et semblablement placés *AK*, *CL*, *EM*, *GN*; je dis que *AK* est à *CL* comme *EM* est à *GN*.

Puisque le parallélipipède *KA* est semblable au parallélipipède *CL*, les parallélipipèdes *AK*, *CL* seront entre eux comme les cubes des côtés *AB*, *CD* (102). Par la même raison les parallélipipèdes *EM*, *GN* seront entre eux comme les cubes des côtés *EF*, *GH*. Mais, par hypothèse, $AB : CD :: EF : GH$; donc $\overline{AB}^3 : \overline{CD}^3 :: \overline{EF}^3 : \overline{GH}^3$ (103); donc $AK : CL :: EM : GN$.

Si $AK : CL :: EM : GN$; je dis que $AB : CD :: EF : GH$.

En effet, puisque $AK : CL :: \overline{AB}^3 : \overline{CD}^3$ (102); que $EM : GN :: \overline{EF}^3 : \overline{GH}^3$, et que $AK : LC :: EM : GN$, on aura $\overline{AB}^3 : \overline{CD}^3 :: \overline{EF}^3 : \overline{GH}^3$, et par conséquent $AB : CD :: EF : GH$ (103).

105. *Un prisme triangulaire est égal à un parallélipipède rectangle quelconque, de même hauteur, ayant une base égale à celle d'un prisme.*

Soit le prisme triangulaire *ABCD* (*fig.* 72); par les points *A*, *C* menons les droites *AE*, *CE* parallèles aux droites *BC*, *AB*, et achevons le parallélipipède *AD*. Le prisme *ABCD* sera égal à la moitié de ce parallélipipède (95). Par le milieu de *AB* menons la droite *FG* parallèle à *BC*, et achevons le parallélipipède *FD*; ce parallélipipède sera égal à la moitié du parallélipipède *AD* (98); mais le prisme *ABC* est aussi égal à la moitié du parallélipipède *AD*; donc le prisme *ABCD* est égal au parallélipipde *FD*. Mais le parallélipipède *FD* est égal à un parallélipipède rectangle quelconque de même hauteur, ayant

une base égale au parallélogramme BG (97) ; donc le prisme $ABCD$ est égal à un parallélipipède rectangle quelconque de même hauteur, ayant une base égale au parallélogramme BG; mais le parallélogramme BG est égal au triangle ABC ; donc le prisme $ABCD$ est égal à un parallélipipède rectangle quelconque de même hauteur, ayant une base égale à celle du prisme ; donc, etc.

106. *Un prisme, quel que soit le nombre des côtés de sa base, est égal à un parallélipipède rectangle de même hauteur, ayant une base égale à celle du prisme.*

Soit le prisme $ABCDE$ (*fig.* 73), menons les diagonales AC, AD; sur une droite quelconque MN, construisons le rectangle MO égal au triangle ABC; sur NO, le rectangle NQ égal au triangle ACD; sur la droite PQ, le rectangle PS égal au triangle ADE (98 *lem.*), et sur le rectangle MO construisons un parallélipipède MT qui ait la même hauteur que le prisme, et achevons les parallélipipèdes NV, PX; on aura $ABCH = MT$, $ACDK = NV$, $ADEL = PX$; donc $ABCDEL = MX$; mais $ABCDE = MS$, et la hauteur du prisme est égale à celle du parallélipipède rectangle MX; donc un prisme quelconque est égal à un parallélipipède rectangle de même hauteur, ayant une base égale à celle du prisme.

COROLLAIRE.

Il suit de-là 1° que les prismes de base égale et de hauteur égale sont égaux;

2° Que les prismes de base égale sont entre eux comme leurs hauteurs et ceux de hauteur égale comme leurs bases ;

3° Que les prismes égaux ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leur hauteur, et que les prismes qui ont leurs bases proportionnelles à leurs hauteurs, sont égaux.

107. *Les prismes triangulaires et semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.*

Soient les primes triangulaires et semblables $ABCD$, $EFGH$

(*fig*. 74); par les points *A*, *C* menons les droites *AK*, *CK* parallèles aux droites *BC*, *AB*, et par les points *E*, *G* les droites *EL*, *GL* parallèles aux droites *EG*, *EE*, et achevons les parallélipipèdes *AD*, *EH*; ces deux parallélipipèdes seront semblables; donc ils sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues Mais les moitiés sont proportionnelles aux touts; donc les moitiés de ces parallélipipèdes sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues; mais les prismes *ABCD*, *EFGH* sont les moitiés des paralélipipèdes *AD*, *EH*, et les côtés des prismes sont les mêmes que ceux des parallélipipèdes, ou leur sont proportionnels; donc les prismes triangulaires et semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

COROLLAIRES.

Il suit de-là évidemment que les prismes semblables, quelque soit le nombre des côtés de leurs bases, sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues; car ces prismes pouvant se diviser en un même nombre de prismes triangulaires et semblables, chacun à chacun, on aura évidemment cette proposition: la somme des prismes triangulaires contenus dans le premier prisme, est à la somme des prismes triangulaires contenus dans le second prisme, comme un prisme triangulaire contenu dans le premier prisme est au prisme homologue contenu dans la second. Mais ces prismes triangulaires sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés hmologues; donc les prismes semblables, quel que soit le nombre des côtés de leurs bases, sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

108. *Si deux prismes sont égaux en hauteur, si l'un deux a pour base un parallélogramme, et l'autre un triangle, et si le parallélogramme est double du triangle, ces prismes seront égaux.*

Soient *ABCDEF*, *GHKLMN* (*fig*. 75) deux prismes de même hauteur, que l'un d'eux ait pour base le parallélogramme

AF et l'autre le triangle *GHK*, et que le parallélogramme *AF* soit double du triangle *GHK*; je dis que le prisme *ABCDEF* est égal au prisme *GHKLMN*.

Achevons les parallélipipèdes *ED*, *GP*. Puisque le parallélogramme *AF* est double du triangle *GHK*, et le parallélogramme *HK* double aussi du triangle *GHK*, le parallélogramme *AF* sera égal au parallélogramme *HK*. Mais les parallélipipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur, sont égaux entre eux (97); donc les parallélipipèdes *ED*, *GP* sont égaux; mais le prisme *ABCDEF* est la moitié du parallélipipède *ED*, et le prisme *GHKLMN* la moitié du parallélipipède *GP*; donc le prisme *ABCDEF* est égal au prisme *GHKLMN*; donc, etc.

Donc si deux prismes ont la même hauteur, si l'un d'eux a pour base un parallélogramme et l'autre un triangle, et si le parallélogramme est double du triangle, ces deux prismes sont égaux.

109. *Toute pyramide triangulaire peut se partager en deux pyramides triangulaires égales et semblables entre elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux, dont la somme est plus grande que la moitié de la pyramide entière.*

Soit une pyramide ayant pour base le triangle *ABC* (*fig.* 76) et pour sommet le point *D*: je dis que la pyramide *ABCD* peut se partager en deux pyramides triangulaires égales et semblables entre elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux, dont la somme est plus grande que la moitié de la pyramide entière.

Partageons les côtés *AB*, *BC*, *CA*, *AD*, *DB*, *DC* en deux parties égales aux points *E*, *F*, *G*, *H*, *K*, *L*, et menons les droites *EH*, *EG*, *GH*, *HK*, *KL*, *LH*, *KF*, *FG*. Puisque *AE* est égal à *EB*, et *AH* égal à *HD*, la droite *EH* sera parallèle à la droite *DB* (59). La droite *HK* est parallèle à la droite *AB*, par la même raison; donc la figure *HEBK* est un parallélogramme; donc *HK* est égal à *EB* (54). Mais *EB* est

égal à *AE* ; donc *AE* est égal à *HK*. Mais *AH* est égal à *HD* ; donc les deux droites *AE*, *AH* sont égales aux droites *HK*, *HD*, chacune à chacune. Mais l'angle *EAH* est égal à l'angle *KHD* ; donc le triangle *AEH* est égal et semblable au triangle *HKD*. Par la même raison, le triangle *AHG* est égal et semblable au triangle *HLD*. Puisque les deux droites *EH*, *HG* qui se touchent sont parallèles aux deux droites *KD*, *DL* qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux (*B*. 200); donc l'angle *EHG* est égal à l'angle *KDL*. De plus, puisque les deux droites *EH*, *HG* sont égales aux droites *KD*, *DL*, chacune à chacune, et que l'angle *EHG* est égal à l'angle *KDL*, le triangle *EHG* sera égal et semblable au triangle *KDL*. Par la même raison, le triangle *AEG* sera égal et semblable au triangle *HKL* ; donc la pyramide dont la base est le triangle *AEG*, et dont le sommet est le point *H* est égale et semblable à la pyramide dont la base est le triangle *HKL*, et dont le sommet est le point *D* (93).

La droite *HK* étant parallèle à un des côtés du triangle *ADB*, savoir, au côté *AB*, le triangle *ADB* sera équiangle avec le triangle *DHK* ; donc ces deux triangles auront leurs côtés proportionnels (63), et seront par conséquent semblables. Par la même raison, le triangle *DBC* est semblable au triangle *DKL*, et le triangle *DAC* semblable aussi au triangle *DHL*. Mais les deux droites *BA*, *AC* qui se touchent sont parallèles aux droites *KH*, *HL* ; donc ces droites comprennent des angles égaux (B. 200) ; donc l'angle *BAC* est égal à l'angle *KHL*. Mais *AB* : *AC* :: *HK* : *HL* ; donc le triangle *ABC* est semblable au triangle *HKL* (59), et par conséquent la pyramide dont la base est le triangle *ABC*, et dont le sommet est le point *D*, est semblable à la pyramide dont la base est le triangle *HKL* et dont le sommet est le point *D* (B. 209). Mais nous avons démontré que la pyramide dont la base est le triangle *HKL* et dont le sommet est le point *D*, est égale et semblable à la pyramide dont la base est le triangle *AEG* et dont le sommet est le point *H* ; donc la pyramide dont la base est le triangle *ABC* et dont le

sommet est le point *D*, est semblable à la pyramide dont la base est le triangle *AEG* et dont le sommet est le point *H*; donc l'une et l'autre des pyramides *AEGH*, *HKLD*, sont semblables à la pyramide entière *ABCD*.

Puisque *BF* est égal à *FC*, le parallélogramme *EBFG* sera double du triangle *GFC*. Mais deux prismes de même hauteur, dont l'un a pour base un parallélogramme, et dont l'autre a pour base un triangle, sont égaux entre eux lorsque le parallélogramme est double du triangle (108); donc le prisme compris sous les deux triangles *BKF*, *EHG*, et sous les trois parallélogrammes *EBFG*, *EBKH*, *KHGF*, est égal au prisme qui est compris sous les deux triangles *GFC*, *HKL* et les trois parallélogrammes *KFCL*, *LCGH*, *HKFG*. Or, chacun de ces prismes, c'est-à-dire celui dont la base est le parallélogramme *EBFG* opposé à la droite *HK*, et celui dont la base est le triangle *GFC* opposé au triangle *HKL*, est plus grand que chacune des pyramides dont les bases sont *AEG*, *HKL*, et les sommets les points *H*, *D*; en effet, si nous menons les droites *EF*, *EK*, le prisme dont la base est le parallélogramme *EBFG* opposé à la droite *HK*, est plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle *EBF* et pour sommet le point *K*. Mais la pyramide qui a pour base le triangle *EBF* et pour sommet le point *K*, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *AEG* et pour sommet le point *H*, car elles sont comprises sous des plans égaux et semblables (93); donc le prisme qui a pour base le parallélogramme *EBFG* opposé à la droite *KH*, est plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle *AEG* et pour sommet le point *H*. Mais le prisme qui a pour base le parallélogramme *EBFG*, opposé à la droite *HK*, est égal au prisme qui a pour base le triangle *GFC* opposé au triangle *HKL*, et la pyramide qui a pour base le triangle *AEG* et pour sommet le point *H*, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *HKL* et pour sommet le point *D*; donc la somme des deux prismes dont nous venons de parler, est plus grande que la somme des deux pyramides qui ont pour bases les triangles *AEG*, *HKL* et pour

sommets les points *H*, *D*; donc la pyramide entière qui a pour base le triangle *ABC* et pour sommet le point *D*, a été partagée en deux pyramides triangulaires égales et semblables entre elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux dont la somme est plus grande que la moitié de la pyramide entière.

110. *Si deux pyramides triangulaires de même hauteur, ayant pour bases les triangles* ABC, DEF (fig. 77) *et pour sommets les points* G, H, *sont partagées chacune en deux pyramides égales entre elles et semblables aux pyramides entières et en deux prismes égaux, si ces nouvelles pyramides sont partagées de la même manière et ainsi de suite; la base* ABC *sera à la base* DEF *comme la somme des prismes contenus dans la pyramide* ABCG *est à la somme des prismes contenus en même nombre dans la pyramide* DEFH.

Puisque *BO* est égal à *OC* et *AL* égal à *LC*, le triangle *ABC* sera semblable au triangle *LOC* (59) Le triangle *DEF* sera semblable au triangle *RXF*, par la même raison. Mais la droite *BC* est double de la droite *CO*, et la droite *EF* est double aussi de la droite *FX*; donc *BC* : *CO* :: *EF* : *FX*. Mais les figures rectilignes semblables et semblablement placées *ABC*, *LOC*, ont été décrites sur les droites *BC*, *CO*, et les figures rectilignes semblables et semblablement placées *DEF*, *RXF* ont été décrites sur les droites *EF*, *FX*; donc le triangle *ABC* est au triangle *LOC*, comme le triangle *DEF* est au triangle *RXF* (79); et, changeant les moyens de place, le triangle *ABC* sera au triangle *DEF* comme le triangle *LOC* est au triangle *RXF*. Mais on démontrera, dans le lemme suivant, que le triangle *LOC* est au triangle *RXF* comme le prisme qui a pour base la triangle *LOC* opposé à *PMN*, est au prisme qui a pour base le triangle *RXF* opposé à *STV*; donc le triangle *ABC* est au triangle *DEF* comme le prisme qui a pour base le triangle *LOC* opposé à *PMN*, est au prisme qui a pour base le triangle *RXF* opposé à *STV*. Mais les deux

prismes qui sont dans la pyramide *ABCG* sont égaux entre eux, et les deux prismes qui sont dans la pyramide *DEFH* sont aussi égaux entre eux; donc le prisme qui a pour base le parallélogramme *KLOB* opposé à la droite *MP*, est au prisme qui a pour base le triangle *LOC* opposé à *PMN*, comme le prisme qui a pour base le parallélogramme *EQRX* opposé à la droite *ST*, est au prisme qui a pour base le triangle *RXF* opposé à *STV*; donc, en ajoutant les conséquens aux antécédens, la somme des prismes *KBOLMP*, *LOCMNP* est au prisme *LOCMNP*, comme la somme des prismes *QEXRST*, *RXFSTV* est au prisme *RXFSTV*, et enfin, changeant les moyens de place, la somme des prismes *KBOLMP*, *LOCMNP* est à la somme des prismes *QEXRST*, *RXFSTV* comme le prisme *LOCMNP* est au prisme *RXFSTV*. Mais on a démontré que le prisme *LOCMNP* est au prisme *RXFSTV* comme la base *LOC* est à la base *RXF*, et comme la base *ABC* est à la base *DEF*; donc le triangle *ABC* est au triangle *DEF* comme la somme des deux prismes qui sont dans la pyramide *ABCG*, est à la somme des deux prismes qui sont dans la pyramide *DEFH*. Si nous partageons de la même manière les nouvelles pyramides, savoir les pyramides *PMNG*, *STVH*, la base *PMN* sera à la base *STV*, comme la somme des deux prismes de la pyramide *PMNG* est à la somme des deux prismes de la pyramide *STVH*. Mais la base *PMN* est à la base *STV* comme la base *ABC* est à la base *DEF*; donc la base *ABC* est à la base *DEF* comme la somme des deux prismes de la pymide *ABCG* est à la somme des deux prismes de la pyramide *DEFH*, comme la somme des deux prismes de la pyramide *PMNG* est à la somme des deux prismes de la pyramide *STVH*, et comme la somme des quatre premiers prismes est à la somme des quatre derniers prismes. On démontrera la même chose pour tous les autres prismes qu'on obtiendra par la division des pyramides *AKLP* et *DQRS*, et en général de toutes les pyramides égales en nombre. Donc, etc.

LEMME.

Nous démontrerons, de la manière suivante, que le triangle *LOC* est au triangle *RXF*, comme le prisme qui a pour base le triangle *LOC* opposé à *PMN*, est au prisme qui a pour base le triangle *RXF* opposé à *STV*.

Imaginons deux perpendiculaires menées des sommets des pyramides sur les plans des triangles *ABC*, *DEF*; ces perpendiculaires seront égales entre elles, parce qu'on a supposé que les pyramides ont des hauteurs égales. Puisque la droite *GC* et la perpendiculaire menées du point *G* sont coupées par les plans parallèles *ABC*, *PMN*, ces deux droites seront coupées proportionnellement (B. 199). Or, la droite *GC* est coupée en deux parties égales au point *N* par le plan *PMN*; donc la perpendiculaire menée du point *G* sur le plan *ABC* est coupée en deux parties égales par le plan *PMN*. Par la même raison, la perpendiculaire menée du point *H* sur le plan *DEF*, est coupée en deux parties égales par le plan *STV*; mais les perpendiculaires menées des points *G*, *H*, sur les plans *ABC*, *DEF*, sont égales entre elles; donc les perpendiculaires menées des plans *PMN*, *STV* sur les plans *ABC*, *DEF*, sont égales entre elles; donc les prismes qui ont pour bases les triangles *LOC*, *RXF*, opposés à *PMN*, *STV*, sont égaux en hauteur; donc *LOC* est à *RXF*, comme le prisme qui a pour base *LOC* est au prisme qui a pour base *RXF* (106 *cor.*).

111. *Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur, sont entre elles comme leurs bases.*

Que les pyramides dont les bases sont les triangles *ABC*, *DEF* (*fig.* 77), et dont les sommets sont les points *G*, *H*, ayent la même hauteur; je dis que la base *ABC* est à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à la pyramide *DEFH*.

Car si cela n'est point, la base *ABC* sera à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à un solide plus petit que la pyramide *DEF* ou à un solide plus grand. Supposons d'abord que la base *ABC* soit à la base *DEF* comme la pyramide

ABCG est à un solide plus petit ; que ce solide soit *Y*. Partageons la pyramide *DEFH* en deux pyramides égales entre elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux ; les deux prismes seront plus grands que la moitié de la pyramide entière (109) ; que les nouvelles pyramides obtenues par cette division soient partagées de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait obtenu de la pyramide *DEFH* certaines pyramides, dont la somme soit plus petite que l'excès de la pyramide *DEFH*, sur le solide *Y* (85) ; que ces pyramides soient *DQRS*, *STVH* ; la somme des prismes restants de la pyramide *DEFH* sera plus grande que le solide *Y*. Partageons semblablement la pyramide *ABCG* en autant de parties que la pyramide *DEFH*. La base *ABC* sera à la base *DEF* comme la somme des prismes de la pyramide *ABCG* est à la somme des prismes de la pyramide *DEFH* (110). Mais, par supposition, la base *ABC* est à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est au solide *Y*; donc la pyramide *ABCG* est au solide *Y*, comme la somme des prismes de la pyramide *ABCG* est à la somme des prismes de la pyramide *DEFH*; donc, en changeant les moyens de place, la pyramide *ABCG* sera à la somme des prismes qu'elle renferme, comme le solide *Y* est à la somme des prismes de la pyramide *DEFH*. Mais la pyramide *ABCG* est plus grande que la somme des prismes qu'elle renferme ; donc le solide *Y* est plus grand que la somme des prismes que renferme la pyramide *DEFH*; mais, au contraire, il est plus petit, ce qui ne peut être ; donc la base *ABC* n'est point à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à un solide quelconque plus petit que la pyramide *DEFH*.

Nous démontrerons semblablement que la base *DEF* n'est point à la base *ABC* comme la pyramide *DEFH* est à un solide quelconque plus petit que la pyramide *ABCG*.

Je dis ensuite que la base *ABC* n'est point à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à un solide plus grand que la pyramide *DEFH*. Car, supposons, si cela est possible, que la base *ABC* soit à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à un solide

quelconque plus grand que la pyramide *DEFH*, et que ce solide soit *Y*. En mettant les antécédens à la place des conséquens et les conséquens à la place des antécédens, la base *DEF* sera à la base *ABC* comme le solide *Y* est à la pyramide *ABCG*. Mais le solide *Y* est à la pyramide *ABCG* comme la pyramide *DEFH* est à un solide quelconque plus petit que la pyramide *ABCG*; car le second antécédent étant plus petit que le premier, le second conséquent doit être plus petit que le premier; donc la base *DEF* est à la base *ABC* comme la pyramide *DEFH* est à un solide quelconque plus petit que la pyramide *ABCG*, ce qui est impossible; donc la base *ABC* n'est point à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à un solide quelconque plus grand que la pyramide *DEFH*; mais on a démontré que la base *ABC* n'est point à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à un solide quelconque plus petit que la pyramide *DEFH*; donc la base *ABD* est à la base *DEF* comme la pyramide *ABCG* est à la pyramide *DEFH*.

112. *Tout prisme triangulaire peut se diviser en trois pyramides triangulaires égales entre elles, et égales chacune à une pyramide dont la base est la même que la base du prisme, et dont le sommet est un des angles de la base supérieure de ce même prisme.*

Soit le prisme dont la base est le triangle *ABC* (*fig.* 78). Menons les droites *BD*, *CE*, *CD*. Puisque la figure *ABED* est un parallélogramme dont *BD* est la diagonale, le triangle *ABD* sera égal au triangle *EDB*; donc la pyramide, qui a pour base le triangle *ABD* et pour sommet le point *C*, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *EDB* et pour sommet le point *C* (111); mais la pyramide qui a pour base le triangle *EDB* et pour sommet le point *C* est égale à la pyramide, qui a pour base le triangle *EBC* et pour sommet le point *D*, car elles sont comprises dans les mêmes plans; donc la pyramide qui a pour base le triangle *ABD* et pour sommet le point *C* est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *EBC* et pour sommet le

point *D*. De plus, puisque la figure *FCBE* est un parallélogramme qui a pour diagonale la droite *CE*, le triangle *ECF* est égal au triangle *CBE*; donc la pyramide qui a pour base le triangle *BEC* et pour sommet le point. *D* est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *ECF* et pour sommet le poiut *D* (111). Mais on a démontré que la pyramide qui a pour base le triangle *BCE* et pour sommet le point *D* est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *ABD* et pour sommet le point *C*; donc la pyramide qui a pour base le triangle *CEF* et pour sommet le point *D* est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *ABD* et pour sommet le point *C*; donc le prisme *ABCDEF* a été partagé en trois pyramides triangulaires égales entre elles; mais la pyramide qui a pour base le triangle *ABD* et pour sommet le point *C* est égale à la pyramide qui a pour base le triangle *CEB* et pour sommet le point *D*, car ces pyramides sont comprises sous les mêmes plans; et l'on a démontré que la pyramide qui a pour base le triangle *ABD* et pour sommet le point *C* est la troisième partie du prisme qui a pour base le triangle *ABC* opposé au triangle *DEF*; donc la pyramide qui a pour base le triangle *ABC* et pour sommet le point *D* est la troisième partie d'un prisme qui a la même base, savoir, le triangle *ABC* opposé au triangle *DEF*; donc, etc.

113. *Toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur.*

En effet, la base d'un prisme étant une figure rectiligne quelconque, ce prisme pourra être partagé en prismes triangulaires; mais les pyramides triangulaires qui ont les mêmes bases que les prismes triangulaires, et le même sommet que la pyramide entière, sont chacune le tiers du prisme correspondant (112); donc la somme des pyramides est le tiers de la somme des prismes; donc la pyramide totale est le tiers du prisme total; donc, etc.

COROLLAIRES.

Il suit de-là et du corollaire de la proposition 106, 1°, que les pyramides de base égale et de hauteur égale sont égales;

2° Que les pyramides de base égale sont entre elles comme leurs hauteurs, et celles de hauteur égale comme leurs bases;

3° Que les pyramides égales ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, et que les pyramides qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, sont égales;

4° Que les pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs côtés homologues.

Car les pyramides semblables sont les tiers de prismes semblables.

114. *Une ligne courbe, ou brisée, ou mixtiligne, est concave du même côté, lorsqu'elle ne peut pas être coupée en plus de deux points par une droite.*

La ligne *ABCD* (*fig.* 79) n'est pas concave du même côté, puisqu'elle est coupée en plus de deux points par la droite *BC*.

115. *Une surface courbe, ou composée de surfaces planes, ou composée de surfaces planes et de surfaces courbes, est concave du même côté, lorsqu'elle ne peut pas être coupée en plus de deux points par une droite;*

116. *Lorsque deux lignes concaves du même côté ont les mêmes extrémités, la ligne enveloppée est plus courte que la ligne enveloppante.*

117. *Lorsque des surfaces concaves du même côté sont terminées à un même contour d'une surface plane, cette surface plane est la plus petite de toutes les surfaces convexes, et la surface enveloppée est plus petite que la surface enveloppante* (*).

(*) Ces deux principes posés par Archimède, ne peuvent être démontrés rigoureusement que quand ces lignes concaves ou surfaces concaves sont des lignes brisées, et des surfaces composées de surfaces planes.

118. *Deux cercles étant concentriques, inscrire dans le plus grand un polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre, et ne touchent point la circonférence du plus petit.*

Soient les deux cercles concentriques *ABCD*, *EFGH* (fig. 80); par le centre *K* conduisons le diamètre *BD*, et par le point *G* menons la droite *AG* perpendiculaire sur la droite *BD*, et prolongeons cette droite vers le point *C*. La droite *AC* touchera le cercle *EFGH*. Partageons la démi-circonférence *BAD* en deux parties égales, et sa moitié en deux parties égales, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il reste un arc plus petit que l'arc *AD* (35). Qu'on ait cet arc et que cet arc soit *LD*; du point *L* conduisons sur la droite *BD* la perpendiculaire *LM*; prolongeons cette perpendiculaire vers le point *N*, et menons les droites *LD*, *DN*; la droite *LD* sera égale à la droite *DN*; mais la droite *LN* est parallèle à la droite *AC*, et la droite *AC* touche le cercle *EFGH*; donc la droite *LN* ne touchera point le cercle *EFGH*; donc, à plus forte raison, la droite *LD* ne touchera point ce même cercle *EFGH*; donc, si l'on applique sur la circonférence *ABCD*, à la suite les unes des autres, des droites égales à la droite *LD*, on aura inscrit dans la circonférence du plus grand cercle un polygone régulier, dont les côtés seront pairs en nombre, et ne toucheront point la circonférence *EFGH*.

119. *Une portion de polygone régulier est une surface terminée par deux droites égales* AB, BC (fig. 81) *et par d'autres droites égales* AD, DE, EC, *les sommets des angles étant également éloignés du point B.*

120. *Deux secteurs concentriques et semblables étant donnés, inscrire dans le plus grand une portion de polygone régulier dont les côtés soient pairs en nombre et ne touchent point l'arc du plus petit secteur.*

Soient les secteurs concentriques et semblables *FKD*, *HKG* (*fig.* 80); par le point *G*, menons la tangente *AC*, partageons l'arc *FD* en deux parties égales, sa moitié en deux parties

égales, et continuons de faire la même chose jusqu'à ce que l'on trouve un arc plus petit que l'arc *AD* (35). Qu'on ait cet arc, et que cet arc soit *LD*. On démontrera, comme dans le problème précédent, que *LD* ne touchera point l'arc *HG*; donc si l'on applique sur l'arc *FD*, à la suite les unes des autres, des droites égales à *LD*, on aura inscrit dans le secteur *FKD* une portion de polygone régulier dont les côtés seront pairs en nombre et ne toucheront point l'arc *HG*.

121. *Deux cercles étant concentriques, circonscrire au plus petit un polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre, et ne coupent point la circonférence du plus grand.*

Inscrivons dans le plus grand cercle un polygone régulier dont les côtés soient pairs en nombre, et ne touchent point la circonférence du plus petit cercle, et circonscrivons au petit cercle un polygone semblable; il est évident que les côtés du polygone circonscrit ne couperont point la circonférence du plus grand cercle; donc l'on aura circonscrit au plus petit cercle un polygone régulier, dont les côtés seront pairs en nombre, et ne couperont point la circonférence du plus grand.

122. *Deux secteurs concentriques et semblables étant donnés, circonscrire au plus petit une portion de polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre et ne coupent point l'arc du plus grand secteur.*

Inscrivons dans le plus grand secteur une portion du polygone dont les côtés soient pairs en nombre et ne touchent point l'arc du plus petit secteur, et menons au plus petit arc des tangentes parallèles aux cordes du plus grand arc; il est évident qu'on aura circonscrit au plus petit secteur une portion de polygone régulier, dont les côtés seront pairs en nombre et ne couperont point l'arc du plus grand secteur.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, que deux cercles étant inégaux, la circonférence du plus grand cercle est la plus grande. En effet, ces deux cercles étant concentriques, inscrivons dans la circonfé-

rence du plus grand un polygone régulier, dont les côtés ne touchent pas la circonférence de l'autre, et circonscrivons un polygone semblable à la circonférence du plus petit ; il est évident que la circonférence du plus grand cercle est plus grande que le contour du polygone inscrit ; mais le contour du polygone inscrit est plus grand que le contour du polygone circonscrit, qui est plus grand que la circonférence du plus petit cercle ; donc la circonférence du plus grand cercle est la plus grande. On démontrerait de la même manière que les deux secteurs semblables étant inégaux, l'arc du plus grand secteur est le plus grand.

Au reste, ces conséquences peuvent se déduire de la proposition 87, où je démontre que les circonférences sont entre elles comme leurs diamètres.

123. *La surface convexe d'un cylindre droit comprise entre deux droites placées dans sa surface est plus grande que le rectangle terminé par ces deux droites et par celles qui joignent leurs extrémités.*

Soit le cylindre droit dont la base est le cercle *AEB* (*fig.*82), et les deux droites *AC*, *BD* placées à sa surface : joignons *AB*, *CD* ; je dis que la surface convexe comprise entre les deux droites *AC*, *BD* est plus grande que le rectangle *ABDC*.

Partageons les arcs *AEB*, *CFB* en deux parties égales aux points *E*, *F* ; et menons les droites *AE*, *EB*, *CF*, *FD*, *EF*. Puisque $AE + EB > AB$, la somme des rectangles *AF*, *FB* sera plus grande que le rectangle *AD* ; que *G* soit l'excès de la somme des deux rectangles *AF*, *FB* sur le rectangle *AD* ; la surface *G* sera plus petite que la somme des segmens de cercle *AHE*, *EKB*, *CLF*, *FMD*, ou elle ne sera pas plus petite ; qu'elle ne soit pas plus petite. La surface convexe comprise entre les droites *AC*, *BD* avec la somme des segmens *AEB*, *CFD* est plus grande que la surface composée des deux rectangles *AF*, *FB*, et des deux triangles *AEB*, *CFD*, puisque ces deux surfaces sont concaves du même côté, et qu'elles ont pour limite

commune le rectangle *AD* (117); donc si l'on retranche de part et d'autre les triangles *AEB*, *CFD*, la surface convexe comprise entre *AC*, *BD* avec les segmens *AHE*, *EKB*, *CLF*, *FMD* sera plus grande que la somme des rectangles *AF*, *FB*. Mais la somme des rectangles *AF*, *FB* égale le rectangle *AD* plus *G*; donc la surface convexe comprise entre les droites *AC*, *BD* avec la somme des segmens *AHE*, *EKB*, *CLF*, *FMD* est plus grande que le rectangle *AD* réuni à la surface *G*; mais la surface *G* n'est pas plus petite que la somme de ces segmens; donc la surface convexe comprise entre les droites *AC*, *BD* est plus grande que le rectangle *AD*.

Que la surface *G* soit plus petite que la somme des segmens *AHE*, *EKB*, *CLF*, *FMD*. Partageons les arcs *AHE*, *EKB*, *CLF*, *FMD* en deux parties égales aux points *H*, *K*, *L*, *M*, et joignons, *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD*, *HL*, *KM*; et continuons de faire la même chose jusqu'à ce que la surface *G* soit plus grande que la somme des segmens restans (85); que les segmens restans soient *BH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD*. Puisque la surface convexe comprise entre les droites *AC*, *BD* avec la somme des segmens *AEB*, *CFD* est plus grande que la surface composée de la somme des rectangles *AL*, *LE*, *EM*, *MB*, et de la somme des figures rectilignes *AHEKB*, *CLFMD* (117), si l'on retranche ces deux figures de part et d'autre, la surface convexe comprise entre les droites *AB*, *BD* avec la somme des segmens restans *AH*, *HE*, *EK*, *KB*, *CL*, *LF*, *FM*, *MD*, sera plus grande que la somme des rectangles *AL*, *LE*, *EM*, *MB*; mais cette dernière somme est plus grande que la somme des rectangles *AF*, *FB*, qui égale le rectangle *AD* plus la surface *G*; donc, à plus forte raison, la surface convexe comprise entre les droites *AC*, *BD* avec la somme des segmens restans, est plus grande que le rectangle *AD*, réuni à la surface *G*; mais la surface *G* est plus grande que la somme des segmens restans; donc la surface convexe, comprise entre les droites *AC*, *BD*, est plus grande que le rectangle *AD*; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que la surface convexe d'un cylindre droit est plus grande que la surface convexe du prisme qui lui est inscrit.

124. *Si par les extrémités de deux droites* Aa, Cc (fig. 80) *placées dans la surface d'un cylindre droit, on mène des tangentes* AG, CG, ag, cg *aux cercles qui sont les bases de ce cylindre, et si ces tangentes se rencontrent, la somme des parallélogrammes sous les tangentes et le côté du cylindre sera plus grande que la surface convexe du cylindre comprise entre les deux droites* Aa, Cc.

Joignons *Gg*, et par les milieux *B*, *b* des arcs *ABC*, *abc*, menons les tangentes *EF*, *ef*; joignons *Ee*, *Fe*; que l'excès de la somme des rectangles *Ag*, *gC* sur la somme des rectangles *Ae*, *eF*, *Fc* soit la surface *K*; la surface *K* sera plus grande que la somme des surfaces comprises entre les arcs *ABC*, *abc* et les droites *AE*, *EF*, *FC*, *ae*, *ef*, *fc*, ou elle ne sera pas plus grande; qu'elle soit plus grande. La surface convexe placée entre les droites *Aa*, *Cc* avec les deux segmens *ABC*, *abc* sera plus petite que la surface composée des parallélogrammes *Ae*, *eF*, *Fc*, et des deux figures rectilignes *AEBFC*, *aebfc* (117). Retranchons de part et d'autre les segmens *ABC*, *abc*; la surface convexe placée entre les droites *Aa*, *Cc* sera plus petite que la surface composée de la somme des rectangles *Ae*, *eF*, *Fc*, et de la somme des surfaces comprises entre les droites *AE*, *EF*, *FC*, *ae*, *ef*, *fc* et les arcs *ABC*, *abc*; mais *K* est plus grand que la somme de ces dernières surfaces; donc la surface, composée de la somme des rectangles *Ae*, *eF*, *Fc* et de la somme des surfaces comprise entre les droites *AE*, *EF*, *FC*, *ae*, *ef*, *fc* est plus petite que la surface composée de la somme des rectangles *Ae*, *eF*, *Fc* et de la surface *K*; donc la surface convexe placée entre les droites *Ae*, *Cc* est plus petite que la somme des rectangles *Ag*, *gC*.

Que la surface *K* ne soit pas plus grande que la somme des

surfaces comprises entre les droites *AE*, *EF*, *FC*, *ae*, *ef*, *fc* et les arcs *ABC*, *abc*. Par les milieux des arcs *AB*, *BC*, *ab*, *bc*, menons des tangentes et continuons de faire la même chose, jusqu'à ce que la somme des surfaces comprises entre les droites *AE*, *EF*, *FC*, *ae*, *ef*, *fc*, et les arcs *ABC*, *abc*, soit plus petite que la surface *K* (85); et l'on démontrera le reste comme on l'a fait plus haut; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que la surface convexe d'un cylindre droit est plus petite que la surface convexe du prisme qui lui est circonscrit.

125. *Deux cylindres droits ayant le même axe, la surface du cylindre extérieur est plus petite que la surface convexe de l'autre.*

En effet, si dans la circonférence de la plus grande base, on inscrit un polygone régulier, dont les côtés ne touchent point la circonférence de l'autre base, et si l'on circonscrit à l'autre base un polygone semblable (118, 121), la surface convexe du cylindre extérieur sera plus grande que la surface convexe du prisme inscrit; mais la surface convexe du pisme inscrit est plus grande que la surface convexe du prisme circonscrit, et la surface convexe du prisme circonscrit est plus grande que la surface convexe du cylindre inscrit; donc la surface convexe du cylindre extérieur est plus petite que la surface convexe de l'autre cylindre.

126. *La surface convexe d'un cône droit est plus grande que la surface convexe de la pyramide qui lui est inscrite.*

127. *La surface convexe d'un cône droit est plus petite que la surface convexe de la pyramide qui lui est circonscrite.*

128. *Deux cônes droits ayant le même axe, la surface convexe du cône intérieur est plus petite que la surface convexe de l'autre cône.*

Ces trois dernières propositions se démontrent de la même manière que les propositions précédentes.

129. *La surface convexe d'un cylindre droit est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence de la base du cylindre et pour hauteur l'axe de ce cylindre.*

Soit le cylindre droit *AQ* (*fig.* 84), ayant pour base le cercle *ABCD*, et pour axe la droite *NO*; soit le rectangle *EG* ayant pour base une droite *FG* égale à la circonférence de la base de ce cylindre, et pour hauteur une droite *EF* égale à l'axe de ce même cylindre; je dis que la surface convexe du cylindre *AO* est égale au rectangle *EG*.

Car si le rectangle *EG* n'est point égal à la surface convexe du cylindre *AO*, ce rectangle sera plus petit ou plus grand que la surface convexe de ce même cylindre.

Supposons d'abord que ce rectangle soit plus petit que la surface convexe de ce cylindre, et qu'il soit égal à la surface d'un cylindre plus petit, savoir à la surface du cylindre *HO*.

A la circonférence de la base du cylindre *HO*, circonscrivons un polygone régulier dont les côtés ne coupent point la circonférence de la base du cylindre *AO* (121); imaginons que ce polygone soit la base d'un prisme circonscrit au cylindre *HO*; la surface convexe de ce prisme sera égale à un rectangle, ayant pour base une droite égale au contour du polygone circonscrit, et pour hauteur une droite égale à *NO*. Mais le contour du polygone circonscrit est plus petit que la circonférence *ABCD*; donc la surface convexe du prisme est plus petite que le rectangle *EG*. Mais, par supposition, ce rectangle est égal à la surface convexe du cylindre *HO*; donc la surface convexe du prisme est plus petite que la surface convexe du cylindre *HO*, ce qui est impossible (124 *cor.*); donc le rectangle *EG* n'est pas plus petit que la surface convexe du cylindre *HO*.

Supposons, en second lieu, que le rectangle *EG* soit plus grand que la surface convexe du cylindre *AO*, et qu'il soit égal à la surface convexe d'un cylindre plus grand, savoir à la surface du cylindre *H'O*. Dans la circonférence *H'K'L'M'*,

inscrivons un polygone régulier dont les côtés ne touchent point la circonférence de la base *ABCD*; imaginons que ce polygone soit la base d'un prisme inscrit au cylindre *H' O*; la surface convexe de ce prisme sera égale à un rectangle ayant pour base une droite égale au contour de ce polygone, et pour hauteur une droite égale à *NO*. Mais le contour du polygone inscrit est plus grand que la circonférence *ABCD*; donc la surface convexe du prime est plus grande que celle du rectangle *EG*. Mais, par supposition, le rectangle *EG* est égal à la surface convexe du cylindre *H' O*; donc la surface convexe du prisme est plus grande que la surface convexe du cylindre *H' O*; ce qui est impossible (124 *cor.*). Donc le rectangle *EG* n'est pas plus grand que la surface convexe du cylindre *AO*; mais nous avons démontré que ce rectangle n'est pas plus petit que cette surface; donc le rectangle *EG* est égal à la surface convexe du cylindre.

Donc la surface convexe du cylindre droit est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence de la base de ce cylindre, et pour hauteur l'axe de ce même cylindre.

COROLLAIRE I.

Il suit manifestement de-là que les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, sont entre elles comme les quarrés des diamètres de leurs bases. En effet, les surfaces convexes des cylindres droits et semblables sont égales à des rectangles dont les bases sont égales aux circonférences des bases de ces cylindres, et dont les hauteurs sont aussi égales aux axes de ces mêmes cylindres; mais les circonférences des bases des cylindres droits et semblables sont proportionnelles aux axes de ces mêmes cylindres; donc les rectangles, qui sont égaux aux surfaces convexes des cylindres droits et semblables, sont des figures semblables, puisque leurs bases sont proportionnelles à leurs hauteurs; donc ces rectangles sont entre eux comme les quarrés de leurs bases. Mais les bases de ces rectangles sont égales aux circonférences des bases de ces mêmes cylindres; donc les surfaces convexes des cylindres

129. *La surface convexe d'un cylindre droit est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence de la base du cylindre et pour hauteur l'axe de ce cylindre.*

Soit le cylindre droit *AQ* (*fig.* 84), ayant pour base le cercle *ABCD*, et pour axe la droite *NO*; soit le rectangle *EG* ayant pour base une droite *FG* égale à la circonférence de la base de ce cylindre, et pour hauteur une droite *EF* égale à l'axe de ce même cylindre; je dis que la surface convexe du cylindre *AO* est égale au rectangle *EG*.

Car si le rectangle *EG* n'est point égal à la surface convexe du cylindre *AO*, ce rectangle sera plus petit ou plus grand que la surface convexe de ce même cylindre.

Supposons d'abord que ce rectangle soit plus petit que la surface convexe de ce cylindre, et qu'il soit égal à la surface d'un cylindre plus petit, savoir à la surface du cylindre *HO*.

A la circonférence de la base du cylindre *HO*, circonscrivons un polygone régulier dont les côtés ne coupent point la circonférence de la base du cylindre *AO* (121); imaginons que ce polygone soit la base d'un prisme circonscrit au cylindre *HO*; la surface convexe de ce prisme sera égale à un rectangle, ayant pour base une droite égale au contour du polygone circonscrit, et pour hauteur une droite égale à *NO*. Mais le contour du polygone circonscrit est plus petit que la circonférence *ABCD*; donc la surface convexe du prisme est plus petite que le rectangle *EG*. Mais, par supposition, ce rectangle est égal à la surface convexe du cylindre *HO*; donc la surface convexe du prisme est plus petite que la surface convexe du cylindre *HO*, ce qui est impossible (124 *cor.*); donc le rectangle *EG* n'est pas plus petit que la surface convexe du cylindre *HO*.

Supposons, en second lieu, que le rectangle *EG* soit plus grand que la surface convexe du cylindre *AO*, et qu'il soit égal à la surface convexe d'un cylindre plus grand, savoir à la surface du cylindre *H'O*. Dans la circonférence *H'K'L'M'*,

inscrivons un polygone régulier dont les côtés ne touchent point la circonférence de la base *ABCD* ; imaginons que ce polygone soit la base d'un prisme inscrit au cylindre *H' O*; la surface convexe de ce prisme sera égale à un rectangle ayant pour base une droite égale au contour de ce polygone, et pour hauteur une droite égale à *NO*. Mais le contour du polygone inscrit est plus grand que la circonférence *ABCD*; donc la surface convexe du prime est plus grande que celle du rectangle *EG*. Mais, par supposition, le rectangle *EG* est égal à la surface convexe du cylindre *H'O*; donc la surface convexe du prisme est plus grande que la surface convexe du cylindre *H'O*; ce qui est impossible (124 *cor.*). Donc le rectangle *EG* n'est pas plus grand que la surface convexe du cylindre *AO*; mais nous avons démontré que ce rectangle n'est pas plus petit que cette surface; donc le rectangle *EG* est égal à la surface convexe du cylindre.

Donc la surface convexe du cylindre droit est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence de la base de ce cylindre, et pour hauteur l'axe de ce même cylindre.

COROLLAIRE I.

Il suit manifestement de-là que les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, sont entre elles comme les quarrés des diamètres de leurs bases. En effet, les surfaces convexes des cylindres droits et semblables sont égales à des rectangles dont les bases sont égales aux circonférences des bases de ces cylindres, et dont les hauteurs sont aussi égales aux axes de ces mêmes cylindres; mais les circonférences des bases des cylindres droits et semblables sont proportionnelles aux axes de ces mêmes cylindres; donc les rectangles, qui sont égaux aux surfaces convexes des cylindres droits et semblables, sont des figures semblables, puisque leurs bases sont proportionnelles à leurs hauteurs ; donc ces rectangles sont entre eux comme les quarrés de leurs bases. Mais les bases de ces rectangles sont égales aux circonférences des bases de ces mêmes cylindres; donc les surfaces convexes des cylindres

droits et semblables sont entre elles comme les quarrés des circonférences de leurs bases, et par conséquent comme les quarrés des diamètres de leurs bases.

COROLLAIRE II.

Il suit encore de-là que la surface d'un cylindre droit est égale à un cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre l'axe du cylindre et le diamètre de sa base.

En effet, que $NO : P :: P : AC$, on aura $NO : \frac{1}{2}P :: 2P : AC$ (73), et par conséquent $NO : \frac{1}{2}P ::$ cir. $2P$: cir. AC; donc cir. $AC \times NO =$ cir. $2P \times \frac{1}{2}P$ (73). Mais cir. $2P \times \frac{1}{2}P$, est égal au cercle qui a pour rayon la droite P, et cir. $AC \times N$ égal le rectangle EG; donc le cercle qui a pour rayon la droite P, est égal à la surface convexe du cylindre AO; donc, etc.

130. *La surface convexe d'un cône droit est égale à un triangle-rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence de la base de ce cône, et pour hauteur le côté de ce même cône.*

Soit le cône droit AQ (*fig.* 84), ayant pour base le cercle $ABCD$, et pour sommet le point O; soit aussi le triangle-rectangle EFG, dont un des côtés FG de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cône AO, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal au côté de ce cône; je dis que la surface convexe du cône AO est égale au triangle-rectangle EFG.

Car si le triangle-rectangle EFG n'est pas égal à la surface convexe du cône droit AO, ce triangle sera plus petit ou plus grand que la surface convexe de ce cône.

Supposons d'abord que le triangle EFG soit plus petit que la surface convexe du cône AO, et qu'il soit égal à la surface convexe d'un cône plus petit, à la surface convexe du cône HQ, par exemple. Circonscrivons à la circonférence $HKLM$ un polygone régulier, dont les côtés ne coupent point la circonférence $ABCD$ (121); imaginons que ce polygone régulier soit la base d'une pyramide circonscrite au cône HO; la surface

convexe de cette pyramide sera égale à un triangle, ayant pour base une droite égale au contour du polygone circonscrit, et pour hauteur la perpendiculaire menée du sommet de cette pyramide sur un des côtés de sa base. Mais le contour du polygone circonscrit est plus petit que la circonférence *ABCD*, qui est égale à *FG*, et la perpendiculaire menée du sommet de la pyramide sur un des côtés de sa base, est plus petite que la droite *EF*; donc la surface convexe de la pyramide circonscrite est plus petite que le triangle-rectangle *EFG*. Mais nous avons supposé que le triangle *EFG* est égal à la surface convexe du cône *HQ*; donc la surface convexe de la pyramide circonscrite, est plus petite que la surface convexe du cône *HQ*, ce qui est impossible (124 *cor.*); donc le triangle-rectangle *EFG* n'est pas plus petit que la surface convexe du cône *AO*.

Supposons à présent que le triangle-rectangle *EFG* soit plus grand que la surface convexe du cône *AO*, et qu'il soit égal à la surface convexe d'un cône plus grand, à la surface convexe du cône *H'O*, par exemple. Inscrivons dans la circonférence *H'K'L'M'* un polygone régulier dont les côtés ne touchent pas la circonférence *ABCD*, et imaginons que ce polygone soit la base d'une pyramide inscrite au cône *H'O*; la surface convexe de cette pyramide est égale à un triangle ayant pour base une droite égale au contour du polygone inscrit, et pour hauteur la perpendiculaire menée du sommet de cette pyramide sur un des côtés de la base. Mais le contour du polygone inscrit est plus grand que la circonférence *A B C D*, qui est égale à *FG*, et la perpendiculaire menée du sommet de la pyramide sur un côté de sa base est plus grande que le côté du cône *AO*, qui est égal à *EF*; donc la surface convexe de la pyramide inscrite au cône *H'O* est plus grande que le triangle-rectangle *EFG*. Mais nous avons supposé que le triangle-rectangle *EFG* est égal à la surface convexe du cône *H'Q*; donc la surface convexe de cette pyramide est plus grande que la surface convexe du cône *H'Q*, ce qui est impossible (124 *cor.*); donc le triangle-rectangle *EFG* n'est pas plus grand que la surface

convexe du cône AQ; mais nous avons démontré que ce triangle n'est pas plus petit; donc le triangle-rectangle EFG est égal à la surface convexe du cône AO.

Donc la surface convexe du cône droit est égale à un triangle-rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal à la circonférence de la base de ce cône, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal au côté de ce même cône.

COROLLAIRE I.

Il suit de-là que les surfaces convexes des cônes droits et semblables, sont entr'elles comme les quarrés des diamètres de leurs bases; cela se démontre de la même manière que dans la proposition 130.

COROLLAIRE II.

Il suit de-là que la surface convexe d'un cône droit est égale à un cercle qui a un rayon moyen, proportionnel entre le côté du cône et le rayon de la base. Cela se démontre de la même manière; et plus simplement que dans le corollaire 2 de la proposition 138.

Il suit de ce dernier corollaire que la surface convexe d'un cône droit est à sa base, comme le côté du cône est au rayon de sa base.

Que P soit une moyenne proportionnelle entre HO et AN, on aura $HO : P :: P : AN$; mais $HO : AN :: \overline{P}^2 : \overline{AN}^2$ (75), et cir. P : cir. $AN :: \overline{P}^2 : \overline{AN}^2$ (90); donc cir. P : cir. $AN :: HO : AN$; mais le cercle qui a pour rayon la droite P est égal à la surface convexe du cône; donc la surface convexe d'un cône droit est à sa base, comme le côté du cône est au rayon de sa base.

131. *La section de la surface convexe d'un cône droit ou oblique par un plan parallèle à sa base, est une circonférence de cercle.*

Coupons le cône $ABRC$ (*fig.* 85) par un plan FSG parallèle

à la base *BRC*; je dis que la section *FSG* de la surface convexe de ce cône par ce plan est une circonférence de cercle.

Du centre *O* de la base du cône, menons autant de rayons *OB*, *OR* qu'on voudra, et par l'axe *AO* et par les rayons *OB*, *OR*, conduisons les plans *AOB*, *AOR*; les sections *AB*, *AR* de la surface convexe du cône par ces plans seront des lignes droites. Le plan *BRC* étant parallèle au plan *FSG*, les sections *OB*, *PF* de ces deux plans par le plan *AOB* seront deux droites parallèles (B. 197); donc les deux triangles *AOB*, *APF* sont semblables; donc *AO* : *AP* :: *OB* : *PF*; on démontrera, de la même manière, que *AO* : *AP* :: *OR* : *PS*; donc *OB* : *PF* :: *OR* : *PS*; donc, en échangeant les moyens de place, *OB* : *OR* :: *PF* : *PS*; mais le rayon *OB* est égal au rayon *OR*; donc la droite *PF* est égale à la droite *PS*. On démontrera de la même manière, que toute autre section du plan *FSG*, par un plan conduit par l'axe, est égale à chacune des droites *PF*, *PS*; donc la section de la surface convexe du cône *ABRC*, par un plan parallèle à la base de ce cône, est une circonférence de cercle.

132. *La surface convexe d'un tronc de cône droit à bases parallèles, est égale à un rectangle qui a pour hauteur une droite égale au côté du tronc, et pour base une droite égale à la circonférence qui résulte de la section de la surface convexe de ce tronc, par un plan parallèle aux deux bases, et mené à égale distance des deux bases.*

Soit un tronc de cône droit *BD* (*fig.* 85), ayant ses bases *BRC*, *ETD* parallèles; je dis que la surface convexe de ce tronc de cône est égale à un rectangle ayant pour hauteur le côté *DC* du tronc *BD*, et pour base une droite égale à la circonférence qui résulte de la section de la surface convexe de ce tronc, par un plan parallèle aux deux bases, et mené à égale distance de ces deux bases.

Complétons le cône *ABRC*; sur le côté *AC* et au point *C*, élevons la perpendiculaire *CH*; que la droite *CH* soit égale à la

circonférence de la base *BRC*; joignons *AH*, et par le point *D*, menons la droite *DK* parallèle à la droite *CH*.

Puisque les triangles *AOC*, *AQD* sont semblables, la droite *AC* sera à la droite *AD*, comme le rayon *OC* est au rayon *QD*. Mais les circonférences sont entre elles comme leurs rayons (87); donc la droite *AC* est à la droite *AD*, comme la circonférence *BRC* est à la circonférence *ETD*; mais les triangles *ACH*, *ADK* sont semblables; donc la droite *AC* est à la droite *AD*, comme la droite *CH* est à la droite *DK*. Donc la circonférence *BRC* est à la circonférence *ETD*, comme la droite *CH* est à la droite *DK*; donc en changeant les moyens de place, la circonférence *BRC* sera à la droite *CH*, comme la circonférence *ETD* est à la droite *DK*; mais par supposition, la circonférence *BRC* est égale à la droite *CH*; donc la circonférence *ETD* est égale à la droite *DK*. Mais la surface convexe du cône total *ABRC* est égale au triangle-rectangle *ACH* (130), et la surface convexe du cône *AETD* est égale au triangle-rectangle *AKD*; donc la surface convexe du tronc de cône *BD* est égale au trapèze restant *DCHK*.

Par le milieu de la droite *DC*, menons la droite *GL* parallèle à l'une ou à l'autre des droites *DK*, *CH*; par le point *L*, où la droite *GL* rencontre *KH*, conduisons la droite *MN* parallèle à *DC*, et prolongeons la droite *DK* jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite *MN* en un point *M*. Puisque *KL* est égal à *LH*, que l'angle *KLM* est égal à l'angle *HLN*, et l'angle *LKM* égal à l'angle *LHN*, le triangle *LKM* sera égal au triangle *LHN*; donc le trapèze *DCHK* sera égal au rectangle *DCNM*. Mais nous avons démontré que la surface convexe du tronc de cône *BD* est égale au trapèze *DCHK*; donc la surface convexe du tronc de cône *BD* est égale au rectangle *CM*. Mais la circonférence *FSG* est égale à la droite *GL*; donc la surface convexe du cône *BD* est égale à un rectangle qui a pour base une droite égale à la circonférence *FSG*, et pour hauteur la droite *DC*.

Donc la surface convexe du tronc de cône droit à bases pa-

rallèles, est égale à un rectangle qui a pour hauteur une droite égale au côté du tronc de cône, et pour base une droite égale à la circonférence du cercle qui résulte de la section de la surface convexe du tronc de cône, par un plan parallèle aux deux bases, et mené à égale distance de ces deux bases.

133. *La surface convexe d'un cône droit est égale à un rectangle qui a pour hauteur une droite égale au côté de ce cône, et pour base une droite égale à la circonférence de cercle qui résulte de la section de la surface convexe du cône, par un plan parallèle à la base du cône, et mené par le milieu de son côté.*

Soit un cône droit *ABRC* (*fig.* 85); je dis que la surface convexe du cône *ABRC* est égale à un rectangle ayant pour hauteur une droite égale au côté de ce cône, et pour base une droite égale à la circonférence de cercle qui résulte de la section de sa surface convexe, par un plan parallèle à sa base, et mené par le milieu de son côté *AC*.

Sur le côté *AC* et au point *C*, élevons une perpendiculaire *CH*; que cette droite soit égale à la circonférence de la base du cône, et joignons *AH*; le triangle *ACH* sera égal à la surface convexe du cône *ABRC* (130). Par le milieu de la droite *AC*, menons la droite *DK* parallèle à *CH*; la droite *DK* sera égale à la circonférence *ETD*. Par les points *K*, *A*, menons les droites *XV*, *AX* parallèles aux droites *AC*, *CH*.

Puisque les deux triangles *ACH*, *ADK* sont semblables, et que *AC* est double de *AD*, le côté *CH* sera double de *DK*; donc le triangle *ACH* est égal au rectangle *CX*. Mais le triangle *ACH* est égal à la surface convexe du cône droit *ABRC*; donc le rectangle *CX* est aussi égal à la surface convexe du cône droit *ABRC*; mais la base *CV* de ce rectangle est égale à la circonférence *ETD*, et la hauteur de ce même rectangle est égale au côté de ce cône; donc la surface convexe d'un cône droit est égale à un rectangle qui a pour hauteur une droite égale au côté de ce cône, et pour base une droite égale à la circonférence

de cercle qui résulte de la section de sa surface convexe, par un plan parallèle à sa base, et mené par le milieu de son côté.

134. *Si un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés tourne autour de son diamètre, la surface décrite par les côtés de ce demi-polygone est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite dans ce demi-polygone, et pour hauteur le diamètre de ce même polygone.*

Que *ABCDEFG* (*fig.* 86) soit un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés; menons les droites *BL*, *CM*, *DH*, *EN*, *EO* perpendiculaires sur *AG*, et que ce demi-polygone fasse une révolution autour de son diamètre *AG*; je dis d'abord que la droite *BA* décrira une surface égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteur la droite *AL*.

Du point *H*, menons *HK* perpendiculaire sur *AB*, et du point *K*, milieu de *BA*, la droite *KP* perpendiculaire sur *AG*; le triangle *HKP* sera semblable au triangle *BLA*, parce que les côtés du premier triangle sont perpendiculaires sur les côtés du second (62); donc *BA* : *AL* :: *HK* : *KP*; mais *HK* : *KP* :: cir. *HK* : cir. *KP* (87); donc *BA* : *AL* :: cir. *HK* : cir. *KP*; donc le rectangle cir. $KP \times BA$ est égal au rectangle cir. $HK \times AL$ (73); mais le rectangle cir. $KP \times BA$ est égal à la surface convexe du cône droit décrite par *BA* (133); donc le rectangle cir. $HK \times AL$ est aussi égal à cette même surface. Mais la droite *HK* est le rayon du cercle inscrit; donc la surface décrite par *BA* est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteur la droite *AL*. Nous démontrerons de la même manière que la surface décrite par *FG* est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteur la droite *OG*.

Je dis à présent que la surface décrite par *CB* est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteur la droite *LM*.

Du point *H*, menons la droite *HQ* perpendiculaire sur le côté *CB* de ce demi-polygone; du point *Q*, milieu de *CB*, et du point *B*, menons les droites *QR*, *BS* perpendiculaires sur les droites *AG*, *CM*.

Le triangle *HRQ* est semblable au triangle *BSC*, parce que les côtés du premier triangle sont perpendiculaires sur les côtés du second; donc *CB* : *BS* :: *HQ* : *QR*; mais *HQ* : *QR* :: cir. *HQ* : cir. *QR* (87); donc *CB* : *BS* :: cir. *HQ* : cir. *QR*. Donc le rectangle cir. $QR \times CB$ est égal au rectangle cir. $HQ \times BS$ (73); mais le rectangle cir. $QR \times CB$ est égal à la surface décrite par *CB* (132); donc le rectangle cir. $HQ \times BS$, c'est-à-dire cir. $HQ \times LM$ est aussi égal à cette surface; mais la droite *HQ* est égale au rayon du cercle inscrit; donc la surface décrite par *CB* est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence du cercle inscrit, et pour hauteur la droite *LM*. On démontrerait de la même manière que les surfaces décrites par les côtés *CD*, *DE*, *EF*, sont égales à autant de rectangles, ayant chacun pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteurs les droites *MH*, *HN*, *NO*. Donc les surfaces décrites par tous les côtés du demi-polygone régulier *ABCDEFG* sont égales à autant de rectangles, ayant chacun pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteurs les droites *AL*, *LM*, *MH*, *HN*, *NO*, *OG*; donc la somme de toutes ces surfaces est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite, et pour hauteur la somme des droites *AL*, *LM*, *MH*, *HN*, *NO*, *OG*, c'est-à-dire *AG*; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de-là que la somme des surfaces décrites par les côtés *CB*, *BA* est égale au rectangle cir. $HK \times AM$, et que la somme des surfaces décrites par *DC*, *CB* est égale au rectangle cir. $HK \times LH$.

Si au lieu d'un demi-polygone régulier, on avait une portion de polygone régulier *ABCD* (*fig.* 87), et si l'on supposait que

cette portion du polygone régulier eût fait une révolution autour de la droite AF, l'on démontrerait de la même manière que dans la proposition précédente, que la surface décrite par les droites AB, BC, CD est égale au rectangle cir. $EG \times AF$, et si l'on avait la portion du polygone régulier $ABCD$ (*fig.* 88); et si l'on supposait que cette portion régulière eût fait une révolution autour de la droite FG, l'on démontrerait, comme dans la proposition précédente, que la surface décrite par les droites AB, BC, CD est égale au rectangle cir. $EH \times FG$.

135. *Toute section de la sphère par un plan, est un cercle.*

Que $ABCD$ (*fig.* 89) soit une section faite par un plan dans une sphère dont le centre est en E. Du centre E, menons la droite EF perpendiculaire sur le plan $ABCD$, et les droites FA, FB, FC à la commune section de la surface de la sphère par le plan coupant, joignons EA, EB, EC. Les droites EA, EB, EC sont égales, puisqu'elles sont des rayons de la sphère; elles sont donc également éloignées de la perpendiculaires EF; donc les droites FA, FB, FC sont égales; donc la section $ABCD$ est un cercle dont le point F est le centre.

Si la section passoit par le centre de la sphère, le rayon du cercle seroit le rayon de la sphère.

136. *Une sphère étant plus grande qu'une autre, la surface de la première est plus grande que la surface de la seconde.*

Que les deux demi-cercles concentriques ADG, $A'D'G'$ (*fig.* 90) fassent une révolution autour de AG; je dis que la surface de la sphère décrite par la demi-circonférence ADG est plus grande que la surface de la sphère décrite par la demi-circonférence $A'D'G'$.

Dans la demi-circonférence ADG, inscrivons un demi-polygone régulier dont les côtés soient pairs en nombre et ne touchent pas la demi-circonférence $A'D'G'$, et à la demi-circonférence $A'D'G'$ circonscrivons un demi-polygone sembla-

ble ; du point D, milieu de la demi-circonférence ADG, menons le rayons DH, il passera par le point D ; menons la droite $D'K$ tangente au point D' ; que ces deux demi-polygones fassent une révolution autour du diamètre AG. Les côtés AB, BC, CD décriront une surface égale à un rectangle, ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite dans le polygone $ABCDEFG$, et pour hauteur le rayon AH, et les côtés ab, bc, cd décriront une surface égale à un rectangle, ayant pour base une droite égale à la circonférence $A'D'G'$, et pour hauteur la droite Ha (134) ; donc la surface décrite par les côtés AB, BC, CD est plus grande que la surface décrite par les côtés ab, bc, od ; mais la surface sphérique décrite par le quart de la circonférence AD est plus grande que la surface décrite par les droites AB, BC, CD, parce que ces deux surfaces concaves du même côté ont pour limite la circonférence décrite par le point D, et que la première enveloppe la seconde (117) ; mais la surface décrite par les côtés AB, BC, CD est plus grande que la surface décrite par les côtés ab, bc, cd ; donc la surface sphérique décrite par le quart de la circonférence AD est plus grande que la surface décrite par les côtés ab, bc, cd. Mais la surface décrite par les côtés ab, bc, cd est plus grande que la surface décrite par les côtés ab, bc, cK, $K'D'$ (*lem. suiv.*) ; et la surface décrite par les droites ab, bc, cK, $K'D'$ est plus grande que la surface sphérique décrite par l'arc ad, parce que ces deux surfaces convexes ont du même côté pour limite la circonférence décrite par le point D', et que la première enveloppe la seconde (117) ; donc la surface sphérique décrite par l'arc AD est plus grande que la surface sphérique décrite par l'arc $A'D'$.

On démontrera de la même manière que la surface sphérique décrite par l'arc DG est plus grande que la surface sphérique décrite par l'arc $D'G'$; donc la surface de la sphère décrite par la demi-circonférence ADG est plus grande que la surface de la sphère décrite par la demi-circonférence $A'D'G'$; donc, etc.

LEMME.

La surface décrite par les droites ab, bc, cd est plus grande que la surface décrite par les droites ab, bc, cK, KD'. En effet, puisque l'angle $dD'K$ est droit, l'hypoténuse dK est plus grande que la droite $D'K$; mais la surface décrite par la droite dK est égale à un rectangle ayant pour base la circonférence décrite par le milieu de la droite dK, et pour hauteur la droite $D'K$ (132), et la surface décrite par la droite $D'K$ est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence ADG, et pour hauteur la droite $D'K$. (129); donc la surface décrite par la droite dK est plus grande que la surface décrite par la droite $D'K$; donc la surface décrite par les droites ab, bc, cd est plus grande que la surface décrite par les droites ab, bc, cK, KD'.

137. *Deux secteurs sphériques étant semblables, et l'un étant plus grand que l'autre, la surface sphérique du plus grand est plus grande que la surface sphérique de l'autre.*

Que les deux secteurs circulaires, semblables et concentriques $ABCD$, $A'B'C'D'$ (*fig.* 91), tournent autour du rayon AD; je dis que la surface sphérique décrite par l'arc AC, est plus grande que la surface sphérique décrite par l'arc $A'C'$.

Dans l'arc AC inscrivons une portion de polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre et ne touchent point l'arc $A'C'$, et à l'arc $A'C'$ circonscrivons une portion de polygone semblable (122); menons les droites CE, cF perpendiculaires sur AD.

La surface décrite par les droites AB, BC est égale à un rectangle, ayant pour base une droite égale à la circonscrite inscrite à la portion de polygone $ABCD$, et pour hauteur la droite AE, et la surface décrite par les droites ab, bc est égale à un rectangle ayant pour base la circonférence inscrite dans la portion du polygone $abcd$, et pour hauteur la droite aF; mais la circonférence inscrite dans la portion de polygone ABC

est plus grande que la circonférence circonscrite à la portion de polygone $abcd$, et AE est plus grand que aF (*lemme suiv.*); donc le premier rectangle est plus grand que le second; donc la surface décrite par les droites AB, BC est plus grande que la surface décrite par les droites, ab, bc. Le reste se démontre comme dans la proposition précédente.

LEMME.

La droite AE est plus grande que la droite aF; menons la droite cG perpendiculaire sur CE. Puisque l'hypoténuse Cc, qui est égale à Aa, est plus grande que cG, qui est égale à EF, il est évident que $Aa + aE > EF + aE$, c'est-à-dire que $AE > aF$.

138. *La surface d'une sphère est égale à un rectangle qui a pour base une droite égale à la circonférence d'un grand cercle de la sphère, et pour hauteur une droite égale à son diamètre.*

Soit le demi-cercle ABC (*fig.* 92); je dis que la surface de la sphère décrite par la révolution de la demi-circonférence ABC autour de son diamètre AC est égale à un rectangle P, ayant pour base une droite égale la circonférence d'un grand cercle de cette sphère, et pour hauteur le diamètre AC.

Car si ce rectangle n'est pas égal à la surface de la sphère qui a pour diamètre la droite AC, ce rectangle sera égal à la surface d'une sphère plus petite ou à la surface d'une sphère plus grande. Supposons d'abord que ce rectangle soit égal à la surface d'une sphère concentrique plus petite, à celle, par exemple, qui a pour diamètre la droite DF.

A la demi-circonférence, dont DF est le diamètre, circonscrivons un demi-polygone régulier, dont les côtés soient en nombre pair et ne coupent point la circonférence du demi-cercle ABC (121). Supposons que ce demi-polygone fasse une révolution autour du diamètre DF; le contour de ce demi-polygone régulier décrira une surface égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence DEF, et pour

à la surface de la seconde comme le quarré du diamètre de la première est au quarré du diamètre de la seconde ; donc, etc.

140. *La surface convexe d'un segment sphérique est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence d'un grand cercle de la sphère, et pour hauteur une droite égale à la hauteur du segment sphérique.*

Que le secteur circulaire *ABC* (*fig.* 93) fasse une révolution autour du rayon *AC* ; je dis que la surface convexe du segment décrite par l'arc *AB* est égale à un rectangle *P* ayant pour base une droite égale à la circonférence, qui a pour rayon la droite *AC*, et pour hauteur la droite *AL*.

Car si le rectangle *P* n'est pas égal à la surface sphérique décrite par l'arc *AB*, ce rectangle sera égal à la surface sphérique décrite par un arc semblable plus petit, ou à la surface sphérique décrite par un arc semblable plus grand.

Que le rectangle *P* soit égal à la surface sphérique décrite par un arc semblable plus petit, à la surface décrite par l'arc *DE*, par exemple.

Circonscrivons à l'arc *DE* une portion du polygone régulier, dont les côtés ne coupent point l'arc *AB* (122). Menons les droites *BL*, *KM* perpendiculaires sur *AC* ; la surface décrite par les droites *GH*, *HK* sera égale à un rectangle ayant pour base la circonférence *DE*, et pour hauteur la droite *GM*. Mais la circonférence *DE* est plus petite que la circonférence *AB*, et la droite *GM* est plus petite que la droite *AL* (137 *lem.*) ; donc le rectangle qui a pour base une droite égale à la circonférence *DE*, et pour hauteur la droite *GM*, est plus petit que le rectangle *P* ; mais par supposition, le rectangle *P* est égal à la surface décrite par l'arc *DE* ; donc la surface décrite par les droites *GH*, *HK* est plus petite que la surface décrite par l'arc *DE* ; ce qui est impossible (137) ; donc le rectangle *P* n'est pas plus petit que la surface décrite par l'arc *AB*.

Que le rectangle *P* soit plus grand que la surface sphérique décrite par l'arc *AB* ; supposons qu'il soit égal à la surface

sphérique décrite par un arc semblable plus grand, à la surface décrite par l'arc $G'K'$, par exemple.

Dans l'arc $G'K'$ inscrivons une portion de polygone régulier dont les côtés ne touchent point l'arc AB (120); menons KN perpendiculaire sur le rayon $G'C$. La surface décrite par les droites $G'H'$, $H'K'$ sera égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence inscrite dans la portion de ce polygone régulier $G'H'K'C$; et pour hauteur la droite $G'N$. Mais la circonférence inscrite dans la portion de ce polygone régulier est plus grande que la circonférence qui a pour rayon AC, et la droite $G'N$ est plus grande que la droite AL (104 *lem.*); donc le rectangle qui a pour base une droite égale à la circonférence inscrite dans la portion de polygone régulier $G'H'R'C$, et pour hauteur $G'N$, est plus grand que le rectangle P; mais le rectangle P est, par supposition, égal à la surface décrite par l'arc $G'K'$; donc la surface décrite par les droites $G'H'$; $H'K'$ est plus grande que la surface décrite par l'arc $G'K'$, ce qui est impossible (117); donc le rectangle P n'est pas plus grand que la surface décrite par l'arc AB; mais il n'est pas plus petit; donc il lui est égal. Donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, que la surface convexe d'un segment sphérique est égale à un cercle qui a pour rayon la droite AB (*fig.* 94), menée du sommet du segment A à la circonférence de sa base.

Car, puisque $AD : AB :: AB : AE$ (B. 112), on aura $\frac{1}{2} AD : AB :: \frac{1}{2} AB : AE$; mais $\frac{1}{2} AD : AB ::$ cir. $\frac{1}{2} AD$: cir. AB (87); donc cir. $\frac{1}{2} AD$: cir. $AB :: \frac{1}{2} AB : AE$; donc le rectangle cir. $\frac{1}{2} AD \times AE$ est égal au rectangle cir. $AB \times \frac{1}{2} AB$ (73); mais le rectangle cir. $\frac{1}{2} AD \times AE$ est egal à la surface sphérique décrite par l'arc AB; donc le rectangle cir. $AB \times \frac{1}{2} AB$ est égal à cette même surface; mais le rectangle cir. $AB \times \frac{1}{2} AB$ est égal au cercle qui a pour rayon la droite AB (88); donc la surface convexe d'un segment sphérique est égale à un

cercle qui a pour rayon la droite menée du sommet du segment à la circonférence de sa base.

Il suit évidemment de-là, que dans la même sphère, ou dans deux sphères, les surfaces convexes des segments sphériques sont entre elles comme les quarrés des droites, menées des sommets du segment aux circonférences de leurs bases; et que la surface convexe d'un segment est à sa base, comme le quarré de la droite, menée du sommet du segment à la circonférence de sa base, est au quarré du rayon de sa base (90).

Il suit encore de-là que pour partager une sphère en deux segmens dont les surfaces soient entre elles comme m est à n, il faut partager le diamètre AD de la sphère en deux parties DE, EA; de manière que $DE : EA :: m : n$, et par le point E conduire un plan perpendiculaire sur AD. En effet, puisque $\overline{BD}^2 : \overline{BA}^2 :: DE : EA$ (B. 112), et que cer. BD : cer. $BA :: DE : EA$, il est évident que la surface décrite par l'arc BD sera à la surface décrite par l'arc BA comme DE est à EA, et par conséquent comme m est à n.

141. *La surface d'une zône est égale à un rectangle qui a pour base une droite égale à la circonférence d'un grand cercle de la sphère, et pour hauteur une droite égale à la portion d'un diamètre comprise entre deux droites qui lui sont perpendiculaires, et qui embrassent cette zône.*

Soit la zône décrite par l'arc CB (*fig.* 94); des extrémités de l'arc CB, menons les deux droites BE, CF perpendiculaires sur le diamètre AD; je dis que la surface de la zône décrite par l'arc CB est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence ACD et pour hauteur la droite EF.

Puisque la surface convexe du segment sphérique décrite par l'arc AC est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence ACD, et pour hauteur la droite AF, et que la surface du segment sphérique décrite par l'arc AB est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence ACD, et pour hauteur la droite AF, il est évident

que la différence des surfaces convexes de ces deux segmens sphériques sera égale à la différence de ces deux rectangles qui ont la même base; mais la différence des surfaces convexes de ces deux segmens sphériques est égale à la zône décrite par l'arc *BC*, et la différence de ces deux rectangles est égale à un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence *ACD*, et pour hauteur la différence des droites *AF*, *AE*, c'est-à-dire, la droite *EF*; mais la droite *EF* est la portion du diamètre comprise entre les droites *BE*, *CF* qui lui sont perpendiculaires et qui comprènent l'arc *BC*; donc la surface de la zône décrite par l'arc *BC* est égale à la surface d'un rectangle ayant pour base une droite égale à la circonférence *ACD*, et pour hauteur la portion du diamètre comprise entre les deux droites *BE*, *CF*, qui lui sont perpendiculaires et qui comprènent l'arc *DC*; donc, etc.

142. *Un solide S étant plus petit qu'un cylindre droit ou oblique, on peut toujours inscrire dans ce cylindre un prisme plus grand que le solide S.*

Soit le cylindre, dont la base est le cercle *ABCD* (*fig.* 50); dans le cercle *ABCD*, inscrivons le quarré *HKLM*, ce quarré étant la moitié du quarré circonscrit, sera plus grand que la moitié du cercle; que ce quarré soit la base d'un prisme inscrit; ce prisme, étant moitié du prisme qui a pour base le quarré circonscrit (106 *cor.*), sera plus grand que la moitié du cylindre, qui est plus petit que le prisme circonscrit. Partageons les arcs *HK*, *KL*, *LM*, *MH* en deux parties égales, et menons les cordes *HB*, *BK*, *KC*, *CL*, *LD*, *DM*, *MA*, *AH*; chacun des triangles *HBK*, *KCL*, *LDM*, *MAH*, sera plus grand que la moitié du segment de cercle où il est placé (86); que ces triangles soient les bases d'autant de prismes inscrits dans le cylindre, chacun de ces prismes sera plus grand que la moitié du segment cylindrique dans lequel il est inscrit. En effet, par les points *A*, *B*, *C*, *D*, menons des parallèles aux droites *MH*, *HK*, *KL*, *LM*, et sur les droites *MH*, *HK*, *KL*, *LM*, et

entre ces parallèles construisons des rectangles ; que ces rectangles soient les bases d'autant de parallélipipèdes ; chaque prisme triangulaire, qui est la moitié du parallélipipède où il est placé (106 *cor.*), sera plus grand que la moitié du segment cylindrique correspondant, parce que ce segment cylindrique est plus petit que le parallélipipède où il est placé; donc la somme des prismes triangulaires sera plus grande que la moitié de la somme des segmens cylindriques. Partageons les arcs restans en deux parties égales, et joignons leurs extrémités par des cordes ; on aura de nouveaux prismes triangulaires, dont la somme sera plus grande que moitié de la somme des segmens cylindriques correspondans dans lesquels ils sont placés. Continuons de faire la même chose, jusqu'à ce qu'il reste certains segmens cylindriques, dont la somme soit plus petite que l'excès du cylindre sur le solide *S* (85), et supposons que ces segmens cylindriques restans soient ceux qui ont pour bases les segmens circulaires *AH*, *HB*, *BK*, ect. Puisque la somme de ces segmens cylindriques, c'est-à-dire, puisque le cylindre moins le prisme, qui a pour base le polygone *AHBKCLDM* est plus petit que le cylindre moins le solide *S*, il est évident que le prisme, qui a pour base le polygone *AHBKCLDM*, est plus grand que le solide *S*; donc, etc.

143. *Un solide* S *étant plus grand qu'un cylindre droit ou oblique, on peut toujours circonscrire à ce cylindre un prisme plus petit que le solide* S.

Soit le cylindre, dont le cercle *ABCD* (*fig.* 50) est la base. Circonscrivons un quarré au cercle *ABCD*; le quarré inscrit étant la moitié du quarré circonscrit, le cercle sera plus grand que la moitié du quarré circonscrit. Mais le prisme, qui a pour base le quarré inscrit, est la moitié du prisme qui a pour base le quarré circonscrit (106 *cor.*); donc le cylindre est plus grand que la moitié du prisme circonscrit. Par les points *A*, *B*, *C*, *D*, milieux des arcs *HM*, *HK*, *KL*, *LM*, menons des tangentes *TV*, *XY*, etc.; le triangle *TPV* sera plus grand que la somme des

triangles *ATM*, *AVH* (87); donc le prisme, qui a pour base *TPV*, sera plus grand que la somme des prismes qui ont pour base les triangles *ATM*, *AVH*, et à plus forte raison que la somme des solides, qui ont pour bases les surfaces comprises entre les droites *HV*, *VT*, *TM*, et l'arc *HM*; par la même raison, les prismes qui ont pour bases les triangles *XQY*, *ZRA'* *B'SC'*, seront plus grands que les solides, qui ont pour bases les surfaces comprises entre les droites *HX*, *XY*, *YZ*, *ZA'*, *A'B'*, *B'C'*, *C'M*, et l'arc *HKLM*; donc la somme des prismes, qui ont pour bases les triangles *TPV*, *XQY*, *ZRA'*, *B'S C'* est plus grande que la somme des solides, qui ont pour bases les surfaces dont nous venons de parler. Donc la somme des prismes qui ont pour base *TPV*, *XQY*, *ZRA'*, *B'SC'*, est plus grande que la moitié de la somme des solides, qui ont pour bases les surfaces comprises entre les côtés du quarré circonscrit et la circonférence *ABCD*. Par les milieux des arcs restans, menons des tangentes; on aura de nouveaux prismes triangulaires, dont la somme sera plus grande que la moitié de la somme des solides, qui auront pour bases les surfaces comprises entre les côtés du polygone *TVXYZA'B'C'* et la circonférence *BBCD*. Continuons de faire la même chose, jusqu'à ce qu'il reste certains solides, dont la somme soit plus petite que l'excès du solide *S* sur le cylindre (85), et supposons que ces solides restans soient ceux qui ont pour bases les surfaces comprises entre le contour du polygone *TVXYZA'B' C'* et la circonférence *ABCD*. Puisque la somme de ces solides restans, c'est-à-dire puisque le prisme qui a pour base le polygone *TVXYZA'B'C'*, moins le cylindre est plus petit que le solide *S*, moins le cylindre, il est évident que le prisme, qui a pour base le polygone *TVXYA'B'C'* est plus petit que le solide *S*; donc, etc.

144. *Un solide* S *étant plus petit qu'un cône droit ou oblique, on peut toujours inscrire dans ce cône une pyramide plus grande que le solide* S.

145. *Un solide S étant plus grand qu'un cône droit ou oblique, on peut toujours circonscrire à ce cône une pyramide plus petite que le solide S.*

Ces deux propositions se démontrent de la même manière que les deux précédentes.

146. *Un cylindre droit ou oblique est égal à un prisme triangulaire droit, ayant pour hauteur celle du cylindre, et pour base un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cylindre, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal au rayon de cette même base.*

Soit le cylindre dont la base est le cercle *ABCD* (*fig.* 50); soit aussi le triangle *EFG*, rectangle en *F*; que le côté *FG* soit égal à la circonférence de la base du cylindre, et que le côté *EF* soit égal à *NM*; supposons que sur *EFG* on ait construit un prisme triangulaire droit, dont la hauteur soit égale à celle du cylindre; je dis que ce prisme est égal au cylindre qui a pour base le cercle *ABCD*.

Car si ce prisme n'est pas égal à ce cylindre, il est plus grand ou plus petit; qu'il soit plus petit. Dans le cylindre qui a pour base le cercle *ABCD*, inscrivons un prisme qui soit plus grand que le prisme, qui a pour base le triangle *EFG* (142), et que la base de ce prisme soit *AHBKCLDM*; ce prisme sera égal à un prisme triangulaire de même hauteur, ayant pour base un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au contour de ce polygone, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la perpendiculaire *MR*, menée du point *N* sur un des côtés du polygone inscrit; car ces deux prismes auront des bases égales et des hauteurs égales (106 *cor.*); mais le contour du polygone inscrit est plus petit que la circonférence *ABCD*, c'est-à-dire que la droite *FG*, et la perpendiculaire *NR*, est plus petite que *EF*; donc le triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au contour du polygone inscrit, et dont l'autre

côté de l'angle droit est égal à *NR*, est plus petit que le triangle *EFG*; donc le prisme triangulaire, qui a pour base un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au contour du polygone inscrit, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à *NR*, est plus petit que le prisme qui a pour base le triangle *EFG*; donc le prisme inscrit est plus petit que ce dernier prisme; mais, au contraire, il est supposé plus grand, ce qui est impossible; donc le prisme, qui a pour base le triangle *EFG*, n'est pas plus petit que le cylindre.

Qu'il soit plus grand; circonscrivons au cylindre un prisme qui soit plus petit que le prisme, qui a pour base le triangle *EFG* (143), et que la base de ce prisme soit le polygone *TVXYZA'B'C'*. Le prisme circonscrit sera égal à un prisme triangulaire de même hauteur, ayant pour base un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au contour du polygone circonscrit, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à *NM*, c'est-à-dire à *EF* (106 *cor.*) Mais le contour du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence *ABCD*, c'est-à-dire que la droite *FG*; donc le triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au contour du polygone circonscrit, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à *EF*, est plus grand que le triangle *EFG*; donc le prisme, qui a pour base un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au contour du polygone, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à *NM*, est plus grand que le prisme qui a pour base le triangle *EFG*; donc le prisme circonscrit est plus grand que ce dernier prisme; mais, au contraire, il est plus petit, ce qui est impossible; donc le prisme qui a pour base le triangle *EFG*, n'est pas plus grand que le cylindre; mais on a démontré qu'il n'est pas plus petit; donc il lui est égal; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, 1° que les cylindres qui ont des bases égales, et de hauteurs égales, sont égaux;

2° Que les cylindres, qui ont des bases égales, sont entre eux comme leurs hauteurs;

3° Que les cylindres, qui ont des hauteurs égales, sont entre eux comme les bases;

4° Que les cylindres égaux ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; et que les cylindres qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, sont égaux.

Toutes ces conséquences se déduisent du corollaire de la proposition 106.

147. *Les cylindres semblables, droits ou obliques, sont entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases.*

Si les cylindres sont droits, cela est évident; en effet, les primes triangulaires, auxquels les cylindres sont égaux, étant alors des figures semblables, ces prismes seront entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues (107 *cor.*), et par conséquent, comme les cubes des rayons des bases de ces cylindres; donc les cylindres droits et semblables sont entre eux comme les cubes des rayons de leurs bases, et par conséquent comme les cubes des diamètres de leurs bases.

Que les cylindres soient obliques; les axes de ces cylindres étant proportionnels à leurs hauteurs, il est évident que les prismes triangulaires, auxquels ces cylindres sont égaux, seront encore semblables entre eux; donc ces prismes seront entre eux comme les cubes des rayons des bases des cylindres; donc ces cylindres seront entre eux comme les cubes des rayons de leurs bases, et par conséquent comme les cubes des diamètres de leurs bases; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que les cylindres, sans être semblables, sont encore entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases, lorsque les diamètres de leurs bases sont proportionnels à leurs hauteurs.

148. *Un cône est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

Que le cercle *ABCD* (*fig.* 52) soit la base d'un cône et d'un cylindre; que leurs hauteurs soient égales; je dis que le cône est le tiers du cylindre.

Car si le cylindre n'égale pas le triple du cône, il sera plus grand que le triple de ce cône, ou il sera plus petit; qu'il soit plus grand. Inscrivons dans le cylindre un prisme plus grand que le triple du cône (142), et que ce prisme soit celui dont la base est le polygone *AEBFCGDH*.

Puisque le prisme, qui a pour base le polygone *AEBFCGDH*, est le triple de la pyramide qui a pour base ce même polygone, et le même sommet que le cône (113 *cor.*), et que le prisme, qui a pour base le polygone *AEBFCGDH* est plus grand que le triple du cône, il est évident que la pyramide est plus grande que le cône; mais elle est au contraire plus petite, ce qui est impossible; donc le cylindre n'est pas plus grand que le triple du cône.

Que le cylindre soit plus petit que le triple du cône; alors le cône sera plus grand que le tiers du cylindre.

Inscrivons dans le cône une pyramide plus grande que le tiers du cylindre, et que cette pyramide soit celle dont la base est le polygone *AEBFCGDH* (142).

Puisque la pyramide, qui a pour base le polygone *AEBFCGDH* est le tiers du prisme qui a la même base, et que la pyramide est plus grande que le tiers du cylindre, il est évident que le tiers de ce prisme est plus grand que le tiers du cylindre; donc le prisme est plus grand que le cylindre; mais, au contraire, il est plus petit, ce qui est impossible; donc le cylindre n'est pas plus petit que le triple du cône; mais il n'est pas plus grand; donc il lui est égal; donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, et du corollaire de la proposition 146, 1° que les cônes qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont égaux;

2° **Que les cônes qui ont des bases égales, sont entre eux comme leurs hauteurs;**

3° **Que les cônes qui ont des hauteurs égales, sont entre eux comme leurs bases;**

4° **Que les cônes égaux ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs; et que les cônes, qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs, sont égaux;**

5° **Que les cônes semblables, et ceux qui ont les diamètres de leurs bases proportionnels à leurs hauteurs, sont entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases.**

149. ***Soient les deux rectangles* ABCD, BEFG (*fig.* 95)*; que le premier soit le plus grand; que les bases* AB, BE *de ces rectangles, soient proportionnelles à leurs hauteurs; je dis que la différence de ces deux rectangles est égale à un rectangle ayant pour base la somme des bases des deux rectangles* ABCD, BEFG, *et pour hauteur la différence des hauteurs de ces mêmes rectangles.***

Achevons le rectangle *DE*; faisons *BL* égal à *BE*, et par le point *L*, menons *LN* parallèle à *AD*, et prolongeons la droite *FG*; le rectangle *BM* sera égal au rectangle *BF*.

Puisque $AB : BE :: BC : BG$, le rectangle *AG* sera égal au rectangle *BH* (73), et par conséquent au rectangle *LC*; donc $AG - LG = LC - LG$; donc $AM = MC = GH$. Mais $AC - BF = AC - LG = KC + AM$; mais $AM = GH$; donc $AC - BF = KC + GH = KH$. Mais $KF = AB + BE$ et $KD = BC - BG$; donc la différence des deux rectangles *ABCD*, *BEFG* est égale à un rectangle ayant pour base la somme des bases des deux rectangles *ABCD*, *BEFG*, et pour hauteur la différence des hauteurs de ces mêmes rectangles. Donc, ect.

150. *Si dans la demi-circonférence de cercle* ADG (*fig.* 96), *on inscrit un demi-polygone régulier* ABCDEFG *d'un nombre pair de côtés, et si ce demi-cercle* ADG *fait une révolution au tour de son diamètre* AG, *ce demi-polygone engendrera un*

solide égal aux deux tiers d'un cylindre ayant pour base le cercle inscrit, et pour axe le diamètre AG *du demi-cercle.*

Du point B et du point L, milieu de AB, menons les droites BK, LM perpendiculaires sur AG; du centre H, conduisons les droites HB, HL; je dis d'abord que le solide engendré par le triangle HAB est égal aux deux tiers d'un cylindre ayant pour base le cercle inscrit, et pour axe la droite AK, c'est-à-dire au solide $\frac{2}{3}$ cer. $HL \times AK$ (*).

Le solide engendré par le triangle-rectangle HBK étant un cône droit, ce solide sera égal à un tiers d'un cylindre droit, ayant pour base cer. BK, et pour axe la droite HK (144); par la même raison, le solide engendré par le triangle-rectangle ABK sera égal au tiers d'un cylindre droit, ayant pour base cer. BK, et pour axe la droite AK; donc la somme des solides engendrés par les deux triangles HBK, ABK, c'est-à-dire par les triangles HAB, est égale au tiers d'un cylindre droit, ayant pour base cer. BK, et pour axe la droite HA, c'est-à-dire que ce solide sera égal à $\frac{1}{3}$ cer. $BK \times HA$. Appelons S le solide engendré par le triangle HBA, nous aurons $S = \frac{1}{3}$ cer. $BK \times HA$. Mais cer. $BK =$ cir. $BK \times \frac{1}{2} BK$ (88); donc $S = \frac{1}{3}$ cir. $BK \times \frac{1}{2} BK \times HA = \frac{1}{6}$ cir. $BK \times BK \times HA$. Mais cir. $BK = 2$ cir. LM (133); donc $S = \frac{1}{3}$ cir. $LM \times BK \times HA$. Mais les triangles semblables ABK, HAL donnent $BK : BA :: HL : HA$; donc $BK \times HA = BA \times HL$ (73); donc $S = \frac{1}{3}$ cir. $LM \times BA \times HL$. Mais les deux triangles semblables

(*) Au lieu d'écrire : *le cercle ou la circonférence, dont AB est le rayon*, j'écris *cer. AB*, ou *cir. AB*. Au lieu d'écrire : *le cylindre qui a pour base le cercle, dont AB est le rayon, et pour hauteur la droite CD*, j'écris : *le cylindre cer. AB × CD*, ou simplement *cer. AB × CD*; au lieu d'écrire : *le rectangle qui a pour base une droite égale à la circonférence, dont AB est le rayon, et pour hauteur la droite CD*; j'écris : *le rectangle cir. AB × CD*, ou simplement *cir. AB × CD*.

Puisque le rectangle *cir.* $AB \times \frac{1}{2} AB$ est égal au cercle, dont AB est le rayon (88); au lieu de *cir.* $AB \times \frac{1}{2} AB$, on peut écrire *cer.* AB, et réciproquement.

HLM, BKA donnent $BA : AK :: HL : LM$; donc $BA : KA$ :: cir. HL : cir. LM (87); donc cir. $LM \times BA =$ cir. $HL \times KA$. Donc $S = \frac{1}{3}$ cir. $HL \times KA \times HL = \frac{2}{3}$ cir. $HL \times \frac{1}{2} HL \times KA$. Mais cir. $HL \times \frac{1}{2} HL =$ cer. HL (88); donc $S = \frac{2}{3}$ cer. $HL \times AK$.

Du point F menons la droite FN perpendiculaire sur AG; nous démontrerons de la même manière que le solide engendré par la révolution du triangle HFG est égal aux deux tiers d'un cylindre droit, ayant pour base le cercle inscrit, et pour axe la droite GN.

Du point C et du point O, milieu de BC, menons les droites CP, OQ perpendiculaires sur AG, et la droite BR perpendiculaire sur CP, prolongeons les droites GA, CB qui se rencontreront en un point S, et joignons HC.

Le solide engendré par le triangle HOS, sera égal au tiers d'un cylindre droit ayant pour base cer. CP, et pour axe la droite HS, c'est-à-dire que ce solide sera égal à $\frac{1}{3}$ cer. $CP \times AS$; et le solide engendré par le triangle HBS sera égal à $\frac{1}{3}$ cer. $BK \times HS$. Appelons S le solide engendré par la révolution du triangle HBC; on aura $S = \frac{1}{3}$ cer. $CP \times HS - \frac{1}{3}$ cer. $BK \times HS = \frac{1}{3}$ (cer. $CP -$ cer. BK) $\times HS = \frac{1}{3}$ (cir. $CP \times \frac{1}{2} CP -$ cir. $BK \times \frac{1}{2} BK$) $HS = \frac{1}{6}$ (cir. $CP \times CP -$ cir. $BK \times BK$) HS. Mais cir. $CP \times CP -$ cir. $BK \times BK =$ (cir. $CP +$ cir. BK) ($CP - BK$) (149), et (cir. $CP +$ cir. BK) ($CP - BK$) $= 2$ cir. $OQ \times CR$ (132); donc $S = \frac{1}{6} \times 2$ cir. $OQ \times CR \times HS = \frac{1}{3}$ cir. $OQ \times CR \times HS$. Mais les deux triangles semblables CBR, HOS donnent $CR : CB :: HO : HS$; donc $CR \times HS = CB \times HO$; donc $S = \frac{1}{3}$ cir. $OQ \times CB \times HO$; mais les triangles semblables CBR, COQ donnent $CB : BR :: HO : OQ$; donc $CB : BR ::$ cir. HO : cir. OQ; donc cir. $OQ \times CB =$ cir. $HO \times BR =$ cir. $HO \times KP$; donc $S = \frac{1}{3}$ cir. $HO \times KP \times HO = \frac{1}{3}$ cir. $HO \times HO \times KP = \frac{2}{3}$ cir. $HO \times \frac{1}{2} HO \times KP$; mais cir. $HO \times \frac{1}{2} HO =$ cer. HO; donc $S = \frac{2}{3}$ cer. $HO \times KP$. Donc le solide engendré par la révolution du triangle HBC est

égal aux deux tiers d'un cylindre ayant pour base le cercle inscrit, et pour axe la droite *KP*.

Des points *D*, *E* menons des perpendiculaires sur *AG*; puisque le nombre des côtés du demi-polygone est pair, il est évident que l'une des perpendiculaires menée des angles de ce demi-polygone passera par le centre. Nous démontrerons de la même manière que les solides engendrés par la révolution des triangles *HCD*, *HDE*, *HGF* seront égaux aux deux tiers d'autant de cylindres ayant pour base le cercle inscrit, et pour axes les droites *PH*, *HT*, *TN*; donc le solide engendré par la révolution de tous les triangles qui ont pour bases les côtés du demi-polygone, est égal aux deux tiers d'un cylindre ayant pour base le cercle inscrit, et pour axe le diamètre du demi-polygone.

151. *Une sphère est égale aux deux tiers d'un cylindre droit ayant pour base un des grands cercles de cette sphère, et pour axe le diamètre de cette même sphère.*

Soit le demi-cercle *ABC* (*fig.* 92); que le point *P* soit le centre; que ce demi-cercle fasse une révolution autour de son diamètre *AC*; ce demi-cercle engendrera une sphère, dont *AC* sera le diamètre; je dis que cette sphère sera égale au solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$.

Que cela ne soit pas; le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$ sera égal à une sphère plus grande, ou à une sphère plus petite; que ce solide soit égal à une sphère plus petite, qu'il soit égal, par exemple, à la sphère concentrique, dont *DF* est le diamètre. A la demi-circonférence *DEF* circonscrivons un demi-polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre, et ne coupent point la demi-circonférence *ABC*; ce demi-polygone, en tournant autour de *GO*, engendrera un solide qui sera égal au solide $\frac{2}{3}$ cer. $PD \times GO$ (152); mais cer. *PD* est plus petit que cer. *PA*, et *GO* est plus petit que *AC*; donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PD \times GO$ est plus petit que le solide cer. $PA \times AC$; mais, par

supposition, le solide $\frac{2}{3}$ cir. $PA \times AC$ est égal à la sphère, dont DF est le diamètre; donc, le solide engendré par la révolution du demi-polygone $GHKLMNO$ est plus petit que la sphère, engendrée par la révolution du demi-cercle DEF, ce qui est impossible; donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$ n'est pas plus petit que la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle ABC.

Que le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$ soit égal à une sphère plus grande que la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle ABC; qu'elle soit égale, par exemple, à la sphère concentrique, engendrée par la révolution du demi-cercle $G'L'O'$; inscrivons dans la circonférence $G'L'O'$ un demi-polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre, et ne touchent pas la demi-circonférence ABC (120); menons la droite PQ perpendiculaire sur $G'H'$; le demi-polygone régulier $G'H'K'L'M'N'O'$, en tournant autour du diamètre $G'O'$, engendrera un solide qui sera égal au solide $\frac{2}{3}$ cer. $PQ \times G'O'$; mais cer. PQ est plus grand que cer. PA, et $G'O'$ est plus grand que AC; donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PQ \times G'O'$ est plus grand que le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$; mais $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AB$ est égal au solide, engendré par la révolution du demi-cercle $G'L'O'$; donc le solide, engendré par la révolution du demi-polygone $G'H'K'L'M'N'O'$, est plus grand que la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle $G'L'O'$, ce qui est impossible; donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$ n'est pas plus grand, que la sphère dont AC est le diamètre; mais nous avons démontré que ce solide n'est pas plus petit; donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$ est égal à la sphère, dont AC est le diamètre; donc, etc.

COROLLAIRE I.

Puisque la sphère est égale au solide $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC$; que $\frac{2}{3}$ cer. $PA \times AC = 2$ cer. $PA \times \frac{1}{3} AC = 4$ cer. $PA \times \frac{1}{6} AC$, et que quatre grands cercles égalent la surface de la sphère, il est évident que la sphère est égale a un cylindre droit, ayant

pour base un cercle égal à la surface de la sphère, et pour axe la sixième partie du diamètre, ou le tiers du rayon, ou bien à un cône droit ayant pour base un cercle égal à la surface de la sphère, et pour axe le rayon de la sphère.

COROLLAIRE II.

La sphère étant égale aux deux tiers d'un cylindre, ayant pour base un grand cercle de la sphère, et pour axe le diamètre de cette même sphère, il est évident que la sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit à cette sphère.

Que S, s soient deux sphères; C, c deux cylindres circonscrits à ces sphères, et D, d les diamètres de ces mêmes sphères; on aura $S = \frac{2}{3} C$, $s = \frac{2}{3} c$; donc $S : s :: \frac{2}{3} C : \frac{2}{3} c :: C : c$; mais les cylindres C, c sont semblables, puisque les diamètres de leurs bases sont égaux aux axes; donc $C : c :: D^3 : d^3$ (146 *cor.*); donc $S : s :: D^3 : d^3$; donc les sphères sont entre elles comme les cubes de leurs diamètres.

152. *Un secteur sphérique est égal aux deux tiers d'un cylindre droit, ayant pour base un des grands cercles de la sphère, et pour axe la hauteur du segment.*

Soit le secteur circulaire CAB (*fig.* 93), menons la droite BL perpendiculaire sur le rayon AC; que ce secteur fasse une révolution autour du rayon AC; ce secteur engendrera un secteur sphérique; je dis que ce secteur sphérique sera égal au solide $\frac{2}{3}$ cer. $AC \times AL$.

Que cela ne soit pas; le solide $\frac{2}{3}$ cer. $AC \times AL$ sera plus grand ou plus petit que le secteur sphérique, engendré par la révolution du secteur circulaire CAB. Qu'il soit plus petit, et qu'il soit égal au secteur sphérique, engendré par le secteur circulaire CDE; menons la droite EM perpendiculaire sur le rayon AC, et circonscrivons à l'arc DE une portion de polygone régulier, dont les côtés soient pairs en nombre, et ne coupent pas l'arc AB (121). Le solide, engendré par la portion de polygone régulier $CGHK$ sera égal au solide $\frac{2}{3}$ cer. $CD \times$

GM (150); mais cer. *CD* est plus petit que cer. *CA*, et la droite *GM* est plus petite que la droite *AL* (91); donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. *CD* × *GM* est plus petit que le solide $\frac{2}{3}$ cer. *AB* × *AL*; mais le solide $\frac{2}{3}$ cer. *AC* × *AL*, est égal au secteur engendré par la révolution du secteur circulaire *CDE*; donc le solide engendré par la révolution de la portion de polygone régulier *CGHK*, est plus petit que le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire *CDF*, ce qui est impossible. Donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. *CA* × *AL*, n'est pas plus petit que le solide engendré par la révolution du secteur circulaire *CAB*.

Qu'il soit plus grand, et que le solide $\frac{2}{3}$ cer. *AC* × *AL* soit égal au secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire *C'G'K'*. Menons la droite *K'N* perpendiculaire sur le rayon *AC*, et la droite *CF* perpendiculaire sur *G'H'*; et dans l'arc *G'K'* inscrivons une portion de polygone régulier dont les côtés soient pairs en nombre, et ne touchent pas l'arc *AB*. Le solide, engendré par la révolution de la portion de polygone *C'G'H'K'*, sera égal au solide $\frac{2}{3}$ cer. *CF* × *G'N*. Mais cer. *CF* est plus grand que cer. *AB*, et *G'N* est plus grand que *AL* (137 *lem.*); donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. *CF* × *G'M* est plus grand que le solide $\frac{2}{3}$ cir. *AC* × *AL*. Mais ce dernier solide est égal, par supposition, au secteur sphérique, engendré par la révolution du secteur circulaire *CG'H'K'*; donc le solide, engendré par la révolution de la portion de polygone régulier *CG'H'*K', est plus grand que le solide engendré par la révolution du secteur circulaire *C G' K'*, ce qui est impossible; donc le solide $\frac{2}{3}$ cer. *AC* × *AL* n'est pas plus grand que le secteur sphérique, engendré par la révolution du secteur circulaire *CA C*; mais il n'est pas plus petit; donc il lui est égal; donc, etc.

COROLLAIRE.

Puisque $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AD : AE$ (*fig.* 94) (B. 168), on aura $\overline{AG}^2 : \overline{AB}^2 :: \frac{1}{4} AD : AE :: \frac{1}{2} AG : AE :: AG : 2\,AE$, parce

que $\overline{AG}^2 = \frac{1}{4} \overline{AD}^2$ (90). Mais $\overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$ :: cer. AG : cer. AB ; donc cer. AG : cer. AB :: AG : $2\,AE$; donc 2 cer. $AG \times AE$ = cer. $AB \times AG$ (73) ; donc $\frac{2}{3}$ cer. $AG \times AE = \frac{1}{3}$ cer. $AB \times AG$. Mais le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire GAB, est égal au cylindre $\frac{2}{3}$ cer. $AG \times AE$; donc ce même secteur sphérique est égal au cylindre $\frac{1}{3}$ cer. $AB \times AG$, c'est-à-dire au cylindre cer. $AB \times \frac{1}{3} AG$; mais cer. AB est égal à la surface convexe de ce secteur sphérique (140 *cor.*) ; donc un secteur sphérique est égal à un cylindre ayant pour base un cercle égal à la surface convexe du segment, et pour axe le tiers du rayon de la sphère, ou bien à un cône ayant pour base un cercle égal à la surface convexe du segment, et pour axe le rayon de la sphère (148).

153. *Que* CAB, CDE *soient deux secteurs circulaires semblables ; je dis que le secteur sphérique, engendré par la révolution du secteur circulaire* CAB, *est au secteur engendré par le secteur circulaire* CDE, *comme le cube de* CA *est au cube* CD.

Soit S le solide engendré par le secteur circulaire CAB, et s le solide engendré par le secteur circulaire CDE ; on aura $S = \frac{2}{3}$ cer. $CA \times AL$, et $s = \frac{2}{3}$ cer. $CD \times AM$; donc $S : s$ :: $\frac{2}{3}$ cer. $CA \times AL$: $\frac{2}{3}$ cer. $CD \times AM$ :: cer. $CA \times AL$: cer. $CD \times AM$. Mais $CB : CL :: CE : CM$; donc $CB : CB - CL :: CE : CE - CM$, ou bien $CB : AL :: CE : DM$, ou bien $CA : CD :: AL : DM$; donc les cylindres cer. $CA \times AL$, cer. $CD \times DM$ sont semblables, puisque les rayons de leurs bases sont proportionnels à leurs axes ; donc cer. $CA \times AL$: cer. $CD \times DM$ :: $\overline{CA}^3 : \overline{CD}^3$. Mais $S : s$ :: cer. $CA \times AL$: cer. $CD \times DM$; donc $S : s :: \overline{CA}^3 : \overline{CD}^3$. Donc les secteurs sphériques semblables sont entre eux comme les cubes de leurs rayons.

154. *Un segment sphérique est égal à un cône droit ayant*

pour base la base du segment, et pour axe une droite qui est à la hauteur du segment, comme le rayon plus la hauteur de l'autre segment est à la hauteur de cet autre segment.

Soit la sphère *ABC* (*fig.* 97); par le centre *G* conduisons un plan, et que le cercle *ABC* soit la section de cette sphère par ce plan; menons le diamètre *AC*, et prolongeons-le de part et d'autre; coupons la sphère par un plan auquel le diamètre *AC* soit perpendiculaire; que la section de la sphère par le plan soit le cercle qui a pour diamètre la droite *BF*; que $ED : EC :: AG + AE : AE$; joignons *DB*, *DF*; je dis que le cône *DBF* qui a pour sommet le point *D*, et pour base le cercle *BE*, est égal au segment sphérique *BCF*.

Menons les rayons *GB*, *GF* et les cordes *BC*, *CF*; soit un cône droit *LMN*; que le rayon *ON* de sa base soit égal à *BC* et son axe *MO* égal à *GC*; ce cône sera égal au secteur sphérique *GBCF* (152 *cor.*).

Puisque $ED : EC :: AG + AE : AE$,
on aura . $ED - EC : EC :: AG + AE - AE : AE$,
c'est-à-dire $CD : EC :: AG : AE$,
ou . . . . $CD : EC :: GC : AE$,
donc . . . $CD : GC :: EC : AE$;
donc . . . $CD + GC : GC :: EC + AE : AE$,
c'est-à-dire $GD : GC :: AC : AE$.

Mais . . . $AC : AE :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$ (B. 168).

et . . . . . $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{BE}^2$, parce que les deux triangles *ABC*, *BEC* sont semblables;

donc . . . . $GD : GC :: \overline{BC}^2 : \overline{BE}^2$;

mais . . . . $\overline{BC}^2 : \overline{BE}^2 ::$ cer. BC : cer. BE (90);
donc . . . $GD : GC ::$ cer. BC : cer. BE.
Mais. . . . $BC = ON$ et $GC = MO$;
donc . . . . $GD : MO ::$ cer. ON : cer. BE.
Donc le cône *LMN* est égal au cône qui a pour base cer. *BE*

et pour axe la droite DG (148 *cor.*). Mais le cône LMN est égal au secteur sphérique $GBCF$; donc le cône qui a pour base cer. BE, et pour axe la droite DG, est égal au secteur sphérique $GBCF$; mais ce dernier cône est égal à la somme des cônes qui ont pour base commune cer. BE, et pour axes les droites GE, ED, parce que ce dernier cône est le tiers du cylindre qui a pour base cer. BE, et pour axe la droite GD, et que la somme des deux cônes est aussi égale au tiers du même cylindre (148); donc la somme des cônes qui ont pour base commune cer. BE, et pour axes les droites GE, ED est égale au secteur sphérique $GBCF$; donc si l'on retranche de part et d'autre le cône qui a pour base cer. BE, et pour axe la droite GE, le cône BDF sera égal au segment sphérique BCF; donc, etc.

Je dis à présent que le cône BKF est égal au segment sphérique BAF.

Soit le cône droit PQR; que le rayon SR de sa base soit égal à AB, et son axe QS égal à AG; la base de ce cône sera égale au cercle AB (140 *cor.*), et ce cône sera égal au secteur sphérique $GBAF$ (152 *cor.*).

Puisque $KE : AE :: GC + EC : EC$,

on aura . . $KE - AE : AE :: GC + EC - EC : EC$,

c'est-à-dire $KA : AE :: GC : EC$,

ou bien. . $KA : AE :: AG : EC$;

donc . . . $KA : AG :: AE : EC$;

donc . . . $KA + AG : AG :: AE + EC : EC$,

c'est-à-dire $KG : AG :: AC : EC$;

mais . . . $AC : EC :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ (B. 168),

et . . . . . $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2$, parce que les triangles ABC, AEB sont semblables;

donc . . $KG : AG :: \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2$;

mais . . . $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 ::$ cer. AB : cer. BE;

donc . . . $KG : AG :: \text{cer.} AB : \text{cer.} BE$.
Mais. . . . $AG = QS$ et $\text{cer.} AB = \text{cer.} SR$;
donc . . . $KG : QS :: \text{cer.} SR : \text{cer.} BE$;
Donc le cône PQR est égal au cône qui a pour base cer. BE, et pour axe la droite KG (148 *cor.*); mais le cône PQR est égal au secteur sphérique $GBAF$; donc le cône qui a pour base cer. BE, et pour axe la droite KG, est égal au secteur sphérique $GBAF$. Mais ce dernier cône est égal au solide engendré par la révolution du triangle KGB autour de KG; car ce dernier cône plus le cône BGF étant le tiers du cylindre qui a pour base cer. BE, et pour axe KE, et le solide dont nous venons de parler, plus le cône BGF étant aussi le tiers du même cylindre, il est evident que le cône qui a pour base cer. BE, et pour axe KG, est au égal solide dont nous venons de parler; donc ce solide est égal au secteur sphérique $GBAF$; donc, si l'on ajoute de part et d'autre le cône qui apour base cer. BE, et pour axe la droite GE, le cône FKB sera égal au segment sphérique FAB; donc, etc.

155. *Couper une sphère donnée en deux segmens qui aient entre eux une raison donnée.*

Soit la sphère $ABCD$ (*fig.* 98). Par le centre K conduisons un plan; que la section de la sphère $ABCD$ par ce plan soit le cercle $ABCD$; menons le diamètre DB et prolongeons-le de part et d'autre; coupons cette sphère par un plan auquel l'axe DB soit perpendiculaire, et que AC soit la section du cercle $ABCD$ par ce plan; faisons ensorte que $EG : EB :: DK + DE : DE$, et que $LE : DE :: KB + EB : EB$, et menons les droites LA, LC, GA, GC; les cônes LAC, GAC seront entre eux comme les droites LE, EG; mais ces cônes sont égaux aux segmens sphériques ADC, ABC; donc les segmens sphériques ADC, ABC seront aussi entre eux comme les droites LE, EG.

Puisque $DK + DE : DE :: EG : EB$,
on aura . . $DK + DE - DE : DE :: EG - EB : EB$,
c'est-à-dire $DK : DE :: BG : EB$;

donc . . . $DK : BG :: DE : EB$ (A.).
Puisque . . $LE : DE :: KB + EB : EB$,
on aura . $LE - DE : DE :: KB + EB - EB : EB$,
c'est-à-dire $LD : DE :: KB : EB$; (B.)
donc . . . $LD : KB :: DE : EB$ (C.);
donc (A.) $LD : KB :: DK : BG$;
donc . . . $BG : KB :: DK : LD$;
donc . . . $BG + KB : KB :: DK + LD : LD$;
c'est-à-dire $KG : KB :: LK : LD$.
donc . . . $KG : LK :: KB$ ou $DK : LD$;
donc . . . $KG + LK : LK :: DK + LD : LD$;
c'est-à-dire $LG : LK :: LK : LD$;
donc (77) $LG \times LD = \overline{LK}^2$ (D);
donc (75) $LG : LD :: \overline{LK}^2 : \overline{LD}^2$ (E.);
Mais (C.) $LD : KB :: DE : EB$;
donc . . . KB ou $DK : LD :: EB : DE$;
donc . . . $DK + LD : LD :: EB + DE : DE$,
c'est-à-dire $LK : LD :: DB : DE$ (F);
donc (79) $\overline{LK}^2 : \overline{LD}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$ (G.);
que . . . $BF = KB$;
puisque (A.) $DE : EB :: DK$ ou $KB : BG$,
et que . . $DE > EB$,
on a . . . KB, c'est-à-dire $BF > BG$.
Mais (B.) $LD : DE :: KB : EB$,
c'est-à-dire $LD : DE :: BF : EB$;
donc . . . $LD + DE : LD :: BF + EB : BF$;
c'est-à-dire $LE : LD :: EF : BF$;
donc . . . $LD : LE :: BF : EF$ (H);
mais (E, G) $LG : LD :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$;
donc . . . $LG : LE :: \overline{DB}^2 \times BF : \overline{DE}^2 \times EF$ (K.)
Donc la raison de LG à LE est donnée.

Faisons en sorte que $LG : LE :: BF : HF$;
la raison de BF à HF sera donnée;
mais . . . BF est donné; donc HF est donné;

mais (K) $LG : LE :: \overline{DB}^2 \times BF : \overline{DE}^2 \times EF$;

donc . . . $BF : HF :: \overline{DB}^2 \times BF : \overline{DE}^2 \times EF$;
mais . . . $BF : HF :: BF \times EF : EF \times HF$;

donc . . . $BF \times EF : EF \times HF :: \overline{DB}^2 \times BF : \overline{DE}^2 \times EF$;

donc . . . $EF : HF :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$ (M.)
Car si l'on suppotoit que les rectangles $BF \times EF$, $EF \times H$ fussent les bases de deux parallélépipèdes rectangles, ayant pour hauteur la droite H; il est évident qu'on auroit :

$$BF \times EF \times H : EF \times HF \times H :: \overline{DB}^2 \times BF : \overline{DE}^2 \times EF,$$

ou bien

$$BF \times EF \times H : \overline{DB}^2 \times BF :: EF \times HF \times H : \overline{DE}^2 \times EF;$$

ce qui donneroit $EF \times H : \overline{DB}^2 :: HF \times H : \overline{DE}^2$,

c'est-à-dire $EF \times H : HF \times H :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$,

c'est-à-dire $EF : HF :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$;

Cela posé, que la raison donnée soit la même que celle de P à Q, et que P soit plus grand que Q; coupons BF de manière que $HF : HB :: P : Q$, et coupons DB, de manière que $EF : HF :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$; je dis que le segment sphérique ADC sera au segment sphérique AHC, comme P est à Q.
Que . . . . . $KB + EB : EB :: LE : DE$ (M.),
et que . . . . $DK + DE : DE :: EG : BE$.
Puisque (F.) $LK : LD :: DB : DE$;

on aura . . $\overline{LK}^2 : \overline{LD}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$;

mais (D.) $LG \times LD = \overline{LK}^2$;

on aura . . . $LG \times LD : \overline{LD}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$;

donc (70) $LG : LD :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$;

mais (M.) $EF : HF :: \overline{DB}^2 : \overline{DE}^2$;

donc . . . . $LG : LD :: EF : HF$ (O);

Mais (N) $BF + EB : EB :: LE : DE$,

c'est-à-dire $EF : EB :: LE : DE$;

donc . . . . $EF : EF - EB :: LE : LE - DE$,

c'est-à-dire $EF : BF :: LE : LD$;

ou bien . . . $LD : LE :: BF : EF$;

Mais (O) $LG : LD :: EF : HF$;

donc (77) $LG : LE :: BF : HF$;

donc . . . . $LG - LE : LE :: BF - HF : HF$,

c'est-à-dire $EG : LE :: BH : HF$;

donc . . . . $LE : EG :: HF : BH$;

mais . . . . $HF : BH :: P : Q$;

donc . . . . $LE : EG :: P : Q$;

donc le cône LAC est au cône GAC comme P est à Q; donc le segment sphérique ADC est au segment sphérique ABC comme P est à Q. Donc, etc.

FIN.

TABLE DES PRINCIPES.

est égale à deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés moins deux, et les angles extérieurs valent quatre angles droits, nos 86 et 87.

Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés et ses angles sont égaux, no 88.

On peut faire passer une circonférence de cercle par tous les angles d'un polygone régulier, no 89.

Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit, no 92.

L'apothème d'un polygone régulier est une perpendiculaire menée du centre sur l'un des côtés; tous les apothèmes d'un polygone régulier sont égaux, no 91.

Dans toute proportion géométrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens, no 96.

La somme des deux premiers termes d'une proportion est à la somme des deux derniers, comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers, no 98.

Une droite menée dans un triangle parallèlement à l'un des côtés, coupe les deux autres côtés en parties proportionnelles, et réciproquement, no 102.

Si d'un même point on mène plusieurs droites qui rencontrent deux parallèles, ces droites seront coupées proportionnellement par les parallèles, no 103.

Une droite qui divise un angle d'un triangle, en deux également, coupe le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés adjacens, no 104.

Deux triangles sont semblables, 1o quand ils ont leurs angles égaux chacun à chacun, numéro 109.

Et par conséquent, lorsque deux angles de l'un sont égaux chacun à chacun à deux angles de l'autre, n. 110.

Quand les côtés de l'un sont parallèles ou perpendiculaires aux côtés de l'autre, no 111.

2o Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, no 113;

3o. Quand les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre, no 114.

La perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, sur l'hypothénuse, le partage en deux triangles qui lui sont semblables; et par conséquent semblables entre eux, no 112.

La perpendiculaire menée de l'angle droit sur l'hypothénuse, est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuse, *ibid.*

Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment correspondant, *ibid.*

Si par un même point on mène plusieurs droites qui rencontrent deux parallèles, les parties de l'une de ces parallèles seront proportionnelles aux parties correspondantes de l'autre, no 115.

La surface d'un polygome régulier est égale à la moitié du produit de son contour, par l'apothême, n° 150.

La surface d'un cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon, numéro 151.

Un secteur circulaire est une portion du cercle terminée par un arc et deux rayons; et l'on nomme *segment circulaire* une surface terminée par un arc et sa corde, numéro 153.

On appelle *toisé des surfaces* la manière de trouver la valeur d'une surface, dont les dimensions sont évaluées en toises et parties de la toise, n° 155.

On trouve à la table les différentes subdivisions de la toise quarrée, page 326.

Les surfaces des parallélogrammes et des triangles, sont entre elles comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs, nos 157 et 158.

Les parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et ceux qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases, *ibid.*

Il en est de même des triangles, *ibid.*

Le quarré du rayon est à la surface du cercle, comme le diamètre est à la circonférence, page 227.

Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables, sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, nos 159 et 160.

Cette propriété s'étend à toutes les figures semblables, numéro 161.

Les cercles étant des figures semblables, leurs surfaces sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, n° 162.

Dans tout triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés, n° 164.

Le quarré de l'hypothénuse est à chacun des quarrés des autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun de ses segmens correspondans à ses côtés, n° 168.

Si de différens points de la circonférence d'un cercle, on mène des cordes à l'extrémité d'un diamètre et des perpendiculaires à ce diamètre, les carrés des cordes seront proportionnels aux parties du même diamètre, comprises entre les perpendiculaires correspondantes à l'extrémité du diamètre où ces cordes aboutissent, numéro 170.

Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard, n° 172.

Deux droites qui se coupent sont dans un même plan, n° 174.

La rencontre ou l'intersection de deux plans est une ligne droite, n° 175.

Par une même ligne droite on peut faire passer une infinité de plans différens, *ibid.*

suivant que ses arêtes sont perpendiculaires ou obliques au plan générateur, *ibid.*

Un parallélépipède est un prisme, dont la base est un parallélogramme; on le nomme *parallélépipède rectangle* lorsqu'il est droit, et que sa base est un rectangle, *ibid.*

Le cube est un parallélépipède rectangle, dont la base est un quarré, et la hauteur égale au côté de ce quarré, *ibid.*

Le cylindre est un prisme dont la base est un cercle, et l'on nomme *axe du cylindre* la droite qui joint les centres des deux bases opposées, n° 205.

La pyramide est un solide terminé par un polygone qui lui sert de base, et par autant de faces triangulaires, qu'il y a de côtés dans cette base, lesquelles se réunissent en un même point, qu'on appelle le *sommet de la pyramide*, n° 206.

Une pyramide est régulière, lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire abaissée du sommet passe par le centre de ce polygone, *ibid.*

Le cône est une pyramide dont la base est un cercle; il est droit ou oblique, suivant que la droite menée du sommet au centre de la base est perpendiculaire ou oblique à cette base, n° 207.

La sphère est un solide engendré par la révolution d'un demi-cercle autour de son diamètre, n° 208.

On appelle *grand cercle de la sphère* celui qui a même diamètre que la sphère, *ibid.*

Le secteur sphérique est un solide engendré par la révolution d'un secteur circulaire autour du rayon; et l'on nomme *calotte sphérique* la surface engendrée dans cette révolution par l'arc du secteur circulaire, *ibid.*

Le segment sphérique est un solide formé par la révolution d'un demi-segment circulaire autour de sa flèche, *ibid.*

On appelle *solides semblables* ceux qui sont terminés par un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées, n° 209.

Les arêtes et les sommets des angles solides correspondans, sont des lignes et des points semblablement disposés dans deux solides semblables, n° 210.

Les triangles dont les côtés joignent, dans deux solides semblables, les sommets de deux angles solides correspondans, sont semblablement disposés, n° 211.

Les diagonales qui joignent les sommets d'angles solides, correspondans de deux solides semblables, sont entre elles comme les arêtes homologues, n° 212.

Les perpendiculaires abaissées des sommets de deux angles solides, correspondans dans deux solides semblables, sont proportionnelles aux arêtes homologues, n° 213.

la surface de sa calotte par le tiers du rayon, nº 247.

La solidité d'un segment sphérique est égale à celle d'un cylindre, qui a pour rayon la flèche, ou pour hauteur le rayon moins le tiers de la flèche, nº 248.

On appelle *prisme tronqué* le solide qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme par un plan incliné à la base, nº 250.

Si les trois angles de l'une des bases d'un prisme triangulaire tronqué, on abaisse des perpendiculaires sur l'autre base, sa solidité est égale au produit de cette dernière base, multipliée par le tiers de la somme des trois perpendiculaires, nº 252.

On appelle *toisé des solides* la manière de trouver la valeur d'un solide dont les dimensions sont évaluées en toises et parties de la toise, nº 256.

Les différentes divisions de la toise-cube sont rapportées dans la table, page 328.

La mesure en usage pour les bois, s'appelle *solive ;* on en trouve les subdivisions dans la table, nº 261.

Les prismes sont entre eux comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs, nº 263.

Les prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et ceux qui ont même base sont entre eux comme leurs hauteurs, *ibid.*

Les solidités de deux corps semblables sont entre elles comme les cubes de leurs lignes homologues, nº 266.

Les solidités de deux sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres, *ibid.*

La trigonométrie plane enseigne à déterminer trois des six parties d'un triangle rectiligne, par la connaissance des trois autres parties, parmi lesquelles il doit se trouver au moins un côté, nº 267.

Quand on connoît deux côtés d'un triangle, et l'angle opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer l'angle opposé à l'autre, qu'autant que l'on connoît si le troisième angle est aigu ou obtus, *ibid.*

Le sinus droit, ou simplement le sinus d'un arc ou d'un angle, est la moitié de la corde d'un arc double de celui qui mesure cet angle, nº 268.

Le cosinus d'un arc ou d'un angle, est le sinus du complément de cet arc ou de cet angle, *ibid.*

Le sinus-verse d'un arc est la différence entre le rayon et le cosinus de cet arc, *ibid.*

Le sinus et le cosinus d'un angle sont les mêmes que le sinus et le cosinus de son supplément, nº 275.

Le sinus de 90^d est égal au rayon ; on le nomme aussi *sinus total*, nº 274.

Le sinus de 50^d est égal à la moitié du sinus total, et la tangente de 45^d est égale au rayon, nº 271.

La tangente et la sécante d'un

contrent sur la surface de la sphère, ont les mêmes propriétés que les angles-plans, n° 321.

Deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entre eux, comme les plans qui les renferment sont perpendiculaires entre eux, n° 322.

Les côtés contigus d'un triangle sphérique ne peuvent plus se rencontrer qu'à une distance de 180° depuis son origine, n° 323.

Les pôles d'un grand cercle sont également éloignés de tous les points de la circonférence de ce grand cercle, et leur distance à chacun de ces points est mesurée par un arc de grand cercle de 90°, n° 325.

Si un point quelconque de la surface de la sphère se trouve éloigné de 90°, de deux points pris dans un arc de grand cercle, ce point est le seul de ce grand cercle, *ibid.*

Quand un arc de grand cercle est perpendiculaire sur un autre arc de grand cercle, il passe nécessairement par le pôle de celui-ci, n° 326.

Si deux arcs de grand cercle sont perpendiculaires à un troisième arc de grand cercle, le point où ils se rencontrent est le pôle de celui-ci, n° 327.

Un angle sphérique a pour mesure un arc de grand cercle que ses côtés prolongés, s'il est nécessaire, comprennent à la distance de 90° depuis le sommet, n° 328.

Chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres, n° 334.

La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que 360°, n° 335.

La somme des trois angles d'un triangle sphérique vaut toujours moins que trois fois 180°, et plus que 180, n° 337.

Un triangle sphérique peut avoir ses trois angles droits, et même ses trois angles obtus, n° 338.

Deux triangles sphériques tracés sur une même sphère, ou sur des sphères égales, sont égaux, 1° lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; 2° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; 3° lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun; 4° lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun, n° 340.

Dans un triangle sphérique isocèle, les deux angles opposés aux côtés égaux, sont égaux; et réciproquement si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés, sont aussi égaux, n° 341.

Dans tout triangle sphérique, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement, n° 342.

Chacun des deux angles obliques d'un triangle sphérique rectangle, est de même espèce que le côté qui lui est

opposé, c'est-à-dire, qu'il est de 90°, si ce côté est de 90°; et plus grand ou plus petit que 90°, selon que ce côté est plus grand ou plus petit que 90°, n° 344.

Si les deux côtés, ou les deux angles d'un triangle sphérique rectangle sont tous deux plus petits ou tous deux plus grands que 90°, l'hypothénuse sera toujours plus petite que 90°; et au contraire elle sera plus grande que 90°, si les deux côtés, ou les deux angles sont de différentes espèces, n° 345.

Selon que l'hypothénuse sera plus petite ou plus grande que 90°, les côtés seront de même ou de différente espèce entre eux; et il en sera de même des angles obliques, n° 347.

Selon que l'hypothénuse et un côté seront de même ou de différente espèce, l'autre côté sera plus petit ou plus grand que 90°, et il en sera de même de l'angle opposé à ce dernier côté, n° 337.

Dans tout triangle sphérique, on a toujours cette proportion : Le sinus d'un des angles est au sinus du côté opposé à cet angle, comme le sinus d'un autre angle est au sinus du côté opposé à celui-ci, n° 349.

Le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé, n° 350.

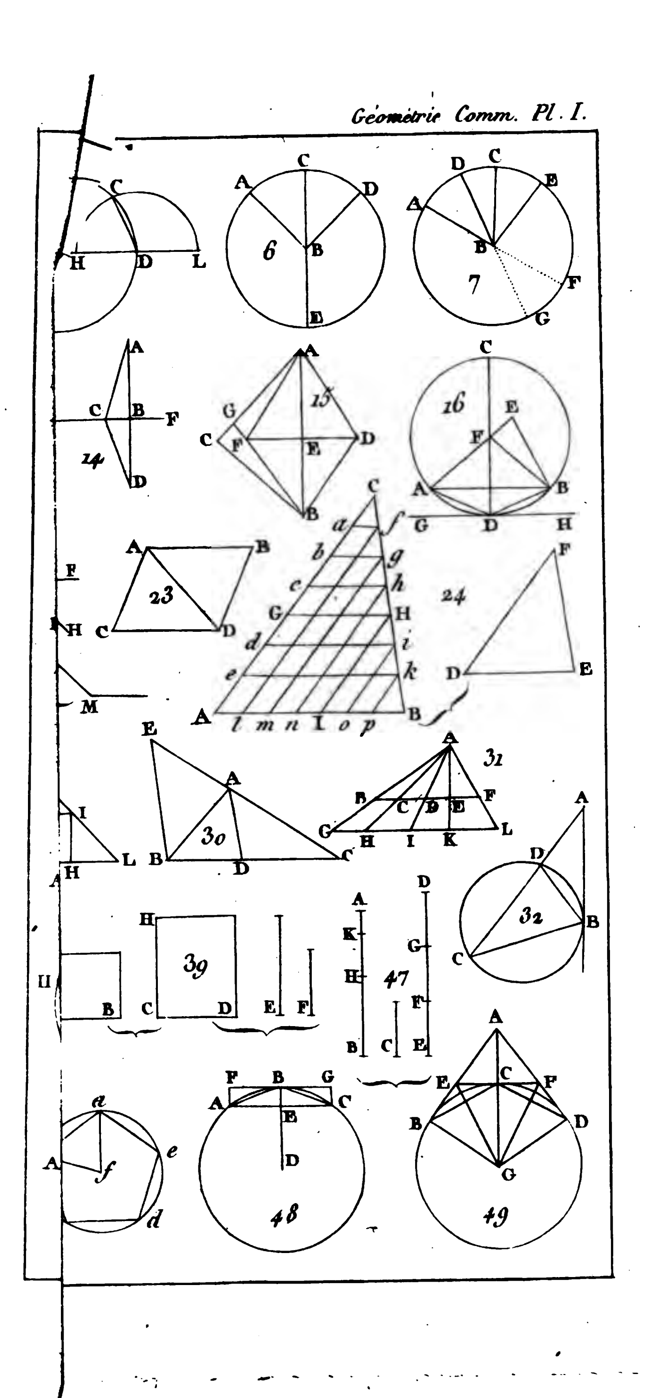
Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté, est à la tangente du côté opposé, n° 351.

Dans tout triangle sphérique, si d'un angle quelconque on abaisse un arc du grand cercle perpendiculairement sur le côté opposé, on aura toujours cette proportion : Le cosinus de l'un des segmens est au cosinus de l'autre segment, comme le cosinus du côté contigu au premier segment est au cosinus du côté contigu au second segment, n° 357.

Les mêmes choses étant supposées que dans la proportion précédente, on a cette autre proportion : Le sinus de l'un des segmens est au sinus de l'autre segment, comme la cotagente de l'angle adjacent au premier segment est à la cotagente de l'angle adjacent au second segment, n° 358.

Dans tout triangle sphérique, *si* d'un angle quelconque, on abaisse un arc perpendiculaire sur le côté opposé, on a cette proportion : La tangente de la moitié du côté sur lequel tombe l'arc perpendiculaire, est à la tangente de la moitié de la somme des deux autres côtés, comme la tangente de la moitié de la différence est, à la tangente de la moitié de la différence des deux segmens, ou à la tangente de la moitié de leur somme, si l'arc perpendiculaire tombe hors du côté opposé, n° 359.

FIN DE LA TABLE DES PRINCIPES.



6
7
14
15
16
23
24
30
31
32
39
47
48
49



51 53 58 65 70 78 80 81

87

88

89

96

97

